Math. Phh
6375

Math. P. 637 hh

Wiegand

Die

höheren bürgerlichen Rechnungsarten.

Von

Dr. August Wiegand.

Die

Nützeren bürgerlichen Rechtsgelehrten.

Dr. August Wiegand.

Die höheren

bürgerlichen Rechnungsarten.

Eine praktische Unterweisung

für

Beamte bei Sparkassen, Sterbekassen, Schuldentilgungskassen, Pensionsinstituten, Wittwenkassen, Stadt- und Staatsbanken, für Buchhalter, Kassirer und Agenten bei Lebensversicherungs-, Leibrenten-, Alterversorgungs-Gesellschaften und anderen Assekuranz- und Geld-Instituten, sowie für Vormünder, Pupillencollegien, Banquiers, Capitalisten, Fabrikunternehmer u. dergl.,

insbesondere auch

für

Lehrer der Mathematik an Real- und Gewerbeschulen.

Mit zahlreichen vollständig ausgerechneten Beispielen und vielen Tabellen

herausgegeben

von

August Wiegand,

Doctor der Philosophie, Oberlehrer und erstem Collegen an der Realschule in den Francke'schen Stiftungen zu Halle, Mitgliede des naturwissenschaftlichen Vereins daselbst.

Halle,

Verlag von Hermann Berner.

1850.

94=BK.

BIBLIOTHECA
Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Mit äusserst wenigen Ausnahmen findet sich die Kenntniss der im Nachfolgenden behandelten, in das bürgerliche Leben so tief eingreifenden, Rechnungsarten zur Zeit nur bei den Mathematikern von Fach. Die Schuld davon tragen eines Theils die darüber handelnden Schriften, die durch ihre Darstellungsweise sich allen denjenigen verschliessen, denen nur dürftige mathematische Kenntnisse zur Seite stehen; anderen Theils aber auch die für den höheren Bürgerstand vorbildenden Real- und Gewerbeschulen, indem diese im Ganzen nur wenig auf jene Rechnungsarten eingehen. So kann es nicht bleiben! Das Geschäftsleben braucht und fordert diese Rechnungen, deshalb muss deren Kenntniss ein Gemeingut des höheren Bürgerstandes, insbesondere der auf dem Titel näher bezeichneten Klasse desselben werden. Es ist freilich war, diese Rechnungsarten haben ihren Boden in mathematischen Lehren, deren Kenntniss bei

Wenigen vorausgesetzt werden darf; allein es giebt auch einen Weg, auf welchem jene Schwierigkeiten umgangen werden, den aber, bis jetzt wenigstens, keine der mir bekannten Schriften gefunden hat. Ob es der vorliegenden gelungen, ihn zu finden, wird der Gebrauch derselben lehren; das Zeugniss wenigstens kann ich mir geben, dass ich eifrig darnach gesucht habe. Der Anblick mathematischer Formeln dürfte Manche schrecken, drum sei diesen hier gleich zum Troste gesagt, dass sie den Schlüssel, mit welchem die Eröffnung so leicht ist, stets dabei finden werden.

Eine Hauptschwierigkeit dürfte für Viele wohl noch der Gebrauch der Logarithmen bilden. Um auch diese zu heben, habe ich in einem Nachtrage eine gemeinverständliche Anweisung zum Gebrauch der, in den meisten Fällen vollkommen ausreichenden, vierstelligen Logarithmen auf Tafel VI. gegeben. Aber auch denen, welche diese, übrigens keineswegs grosse, Schwierigkeit nicht zu überwinden vermöchten, ist die Ausführung der behandelten Rechnungsarten noch möglich gemacht worden durch Darbietung der Tafeln I. bis IV. Die anschaulichste Erläuterung dürfte Jeder in dieser Beziehung in den zahlreichen, vollständig berechneten, Beispielen finden.

Was nun den theoretischen Theil betrifft, so bin ich nicht, wie sonst geschieht, vom Allgemei-

nen zum Speziellen, sondern von diesem zu jenem, mithin vom Leichteren zum Schwierigeren übergegangen. Man wird dies dem Zwecke, den ich verfolgte, vollkommen angemessen finden.

Bei den Versicherungsrechnungen habe ich die Aussteuerversicherung vorzugsweise einer durchgreifenden Berechnung, deren sie bis jetzt noch gänzlich ermangelte, unterworfen, und darf ich namentlich hoffen, dass die Lebensversicherungs-Banken mir wegen der ihnen dargebotenen Tabellen ihren Dank nicht versagen werden. Es wäre mir nicht möglich gewesen, die darin verborgenen, ungemein umfänglichen, Rechnungen zu überwältigen und überhaupt die Schrift mit so zahlreichen Beispielen auszustatten, wenn mir nicht die Primaner und Obersecundaner der hiesigen Realschule hülfreich zur Seite gestanden hätten. Die Lust und Freudigkeit, mit welcher dieselben mir ihre freie Zeit gewidmet haben, verdient öffentlich anerkannt zu werden. Die **S. 131** aufgestellte Leibrententabelle ist ebenfalls von zweien meiner Schüler, den Primanern Bäntsch und Dannenberg berechnet worden. Ganz besonderen Dank bin ich endlich noch einem meiner früheren Schüler, Herrn Albert Protze (jetzt bei der Artillerie in Cöln) schuldig, der nach ehrenvoll bestandenem Maturitätsexamen an hiesiger Realschule mir fast zwei volle Monate hindurch mit seinen schönen mathematischen Kenntnissen hülfreich zur Seite gestanden hat.

Möchte vorliegende Schrift dieselbe freundliche Aufnahme, namentlich auch bei meinen Collegen, finden, denen meine früheren Schriften, insbesondere die vor Kurzem in vierter Auflage erschienene Schrift: „Die Vortheile und Garantieen der Lebensversicherungs-Banken," in so reichem Maasse sich zu erfreuen hatten; möchten namentlich auch angehende Mathematiker hierin die Brücke zum Studium grösserer theoretischer Werke, wie Grunert's „Politische Arithmetik" u. dgl. finden; möchte diese Schrift endlich überhaupt dazu beitragen, dass die in ihr vorgetragenen Lehren in grösserem Maasse ein Gemeingut aller Gebildeten würden, als es bis jetzt leider! der Fall gewesen ist.

Halle, den 5. September 1850.

Der Verfasser.

Erstes Kapitel.

Zinseszins-Rechnung.

§. 1.

Theorie dieser Rechnungsart.

Ist ein Kapital so angelegt, dass dessen Zinsen nicht erhoben, sondern mit dem Kapital vereinigt und später ebenfalls mit verzinst werden, so sagt man, das Kapital stehe auf Zinseszinsen *). In diesem Falle wächst also das Kapital alljährlich und es ist sein Endwerth (S) ausser vom Anfangswerthe (C) noch abhängig vom Zinsfusse ($p\frac{0}{0}$) und der Anzahl Jahre (n), während welcher es ausstand.

Wird ein Kapital C zu $p\frac{0}{0}$ angelegt, so tragen 100 (Thaler, Gulden u. s. w.) in jedem Jahre p (Thaler, Gulden u. s. w.) ein, d. h. also bei Zinseszinsen wachsen 100 (Thaler, Gulden u. s. w.) in jedem Jahre an zu $100 + p$ (Thaler, Gulden etc.) Bezeichnet demnach S_1 die Summe, zu welcher das Anlagekapital nach dem ersten Jahre angewachsen ist, so hat man die Proportion

$$C : S_1 = 100 : 100 + p,$$

mithin zur Berechnung von S_1 die Formel

$$S_1 = C \cdot \frac{100 + p}{100} \quad \ldots . (1).$$

---

*) Nach dem preuss. Landrechte wird der Anatocismus oder die Entnahme von Zinseszinsen von einer und derselben Person als Wucher geahndet. Dessenungeachtet ist es nicht nur erlaubt, sondern auch ganz natürlich und vernünftig, dass Jemand sein Kapital in der Weise benutzen kann, dass er die erhobenen Zinsen immer wieder an eine zweite Person ausleihet oder etwa in einer Sparkasse zinsbar anlegt und sich hierdurch doch den Genuss von Zinseszinsen sichert.

Bezeichnen S_2, S_3, ... S_n bezüglich die Summen, zu welchen das Kapital C nach 2, 3, ... n Jahren angewachsen ist, so ist, wie

$$C : S_1 = 100 : 100 + p,$$

entsprechend

$$S_1 : S_2 = 100 : 100 + p,$$

$$S_2 : S_3 = 100 : 100 + p,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$S_{n-1} : S_n = 100 : 100 + p.$$

Durch Zusammensetzung dieser Proportionen erhalten wir aber

$$C : S_n = 100^n : (100 + p)^n$$

oder

$$S_n = C \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n \quad \ldots \quad (2),$$

welches die Formel für die Zinseszins-Rechnung ist.

Der Ausdruck $\frac{100 + p}{100}$, welchen wir der Kürze wegen im Folgenden stets mit dem Buchstaben e bezeichnen wollen, lässt sich immer sehr leicht durch einen Decimalbruch ausdrücken. So ist bei 3, 4, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$ u. s. w. Procent der Werth e bezüglich gleich 1,03; 1,04; 1,045; 1,0475; 1,05333 ... u. s. w.

Die Formel (2), welche, wenn wir e einführen und der Kürze halber den Zeiger n von dem S weglassen, die einfache Form

$$S = C \cdot e^n \quad \ldots \quad (3)$$

annimmt, kann offenbar dazu dienen, irgend eine der vier Grössen C, S, p, n zu berechnen, wenn die drei übrigen gegeben sind. Man erhält nämlich aus ihr

$$C = \frac{S}{e^n} \quad \ldots \quad (4),$$

$$e = \sqrt[n]{\frac{S}{C}} \quad \ldots \quad (5),$$

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log e} \quad \ldots \quad (6).$$

Die Formeln unter (3), (4), (5) und (6) enthalten die Lösung aller auf die Zinseszins-Rechnung Bezug habenden Aufgaben.

§. 2.

Bestimmung des Endwerthes.

1. Beispiel.

Die Anwendung der Zinseszinsrechnung findet überall Statt, wo Gelder angelegt werden, die keine unmittelbaren Zinsen tragen. — *Legt z. B. Jemand einen Kohlenschacht an und verwendet darauf eine Summe von* 12000 *Thalern, so hat er, wenn der Schacht vielleicht erst nach* 5 *Jahren einen Ertrag gewährt, nach dieser Zeit nicht* 12000 *Thaler aufgewendet, sondern (bei* $4\frac{0}{0}$*) die Summe*

$$S = 12000 \,.\, 1{,}04^5.$$

Ausrechnung.

$$\log S = \log 12000 + 5 \log 1{,}04.$$

$$\log 12000 = 4{,}0791812$$
$$\log\ 1{,}04 = 0{,}0170333 \quad (5$$
$$5 \log 1{,}04 = 0{,}0851665$$
$$\log S = 4{,}1643477$$
$$S = 14599{,}83 \text{ Thlr.}$$

Ausserdem findet die Zinseszins-Rechnung ihre Anwendung bei Geldern, die zu Fabrikanlagen, Eisenbahn- und Strassenbauten u. s. w. verwendet werden; ferner auch beim sogenannten Discontiren. Unter Disconto versteht man nämlich den Abzug, welchen sich der Empfänger gefallen lassen muss, wenn er ein erst später fälliges Kapital schon jetzt hebt. Endlich kommt auch die Zinseszins-Rechnung in Anwendung beim Holzertrage mehrjährig geschonter Forste, beim Wachsen der Bevölkerung eines Ortes u. dergl.

2. Beispiel.

Ein Vater will seinem Sohne gleich bei der Geburt ein Kapital sichern, welches dem letzteren im 24*sten Lebensjahre ausgezahlt wird. Zu dem Ende legt er jetzt gleich ein Kapital von* 350 *Thlr. in eine Sparkasse, welche* $3\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$ *giebt. — Welche Summe wird die Sparkasse, wenn die Zinsen jährlich zum Kapital geschlagen worden sind, dem Sohne auszuzahlen haben?*

Es ist hier $C = 350$, $e = 1{,}035$, $n = 24$, folglich nach (3)

$$S = 350 \cdot 1{,}035^{24}$$

$$\log S = 24 \log 1{,}035 + \log 350.$$

$$\log 1{,}035 = 0{,}0149403 \quad (4$$

$$24 \log 1{,}035 = 0{,}3585672 \quad (6$$

$$\log 350 = 2{,}5440680$$

$$\log S = 2{,}9026352$$

$$S = 799{,}16 \ldots \text{Thlr.}$$

Anmerkung. ***Tafel I.*** enthält den künftigen Werth des Kapitels **1.** (1 Thlr., 1 Fl. u. s. w.) nach 1 bis 100 Jahren für verschiedene Procentsätze. Will man mittelst dieser Tafel nun z. B. berechnen, zu welcher Summe 20 Thlr. in 23 Jahren bei $4\frac{1}{2}$ % anwachsen, so sucht man in der zu 23 Jahren gehörigen Querspalte die Zahl, über welcher $4\frac{1}{2}$ % steht, es ist dies 2,752166, und multiplicirt diese noch mit 20, so dass man also erhält: 55,04332 Thlr.

§. 3.

Bestimmung des Anfangswerthes.

3. Beispiel.

Wenn ein Vater seinem Kinde im 20*sten Jahre eine Aussteuer von* 1000 *Thlr. dadurch sichern will, dass er gleich bei der Geburt in eine Bank eine bestimmte Summe einlegt, wie hoch wird diese Summe sein müssen, wenn die Bank* $3\frac{3}{4}$ % *Zinsen berechnet?*

Setzen wir in die Formel

$$C = \frac{S}{e^n},$$

$S = 1000$, $e = 1{,}0375$, $n = 20$ ein, so erhalten wir

$$\log C = \log 1000 - 20 \log 1{,}0375.$$

$$\log 1000 = 3{,}0000000$$

$$\log 1{,}0375 = 0{,}0159881$$

$$20 \log 1{,}0375 = 0{,}319762 \quad (20$$

$$\log C = 2{,}680238$$

$$C = 478{,}89 \text{ Thaler.}$$

4. Beispiel.

Jemand hat seinem jüngeren Bruder bei dessen Grossjährigkeit im 24. *Lebensjahre dessen Erbantheil von* 12750 *Thalern auszuzahlen, letzterer will aber im* 19*ten Jahre*

auswandern und verlangt deshalb sein Erbe. Wie viel hat der ältere Bruder auszuzahlen, wenn 4 % als landesübliche Zinsen angesehen werden?

Wir haben hier S = 12750, e = 1,04, n = 5, also

$$\log C = \log 12750 - 5 \log 1{,}04.$$

$$\log 12750 = 4{,}1055102$$
$$\log 1{,}04 = \underline{0{,}0170333}$$
$$5 \log 1{,}04 = \overline{0{,}0851665} \quad (5$$
$$\log C = \overline{4{,}0203437}$$
$$C = 10479{,}5 \text{ Thaler.}$$

Anmerkung. *Taf. II.* enthält den gegenwärtigen Werth des nach 1 bis 100 Jahren zahlbaren Kapitals von 1 Thaler. Soll z. B. berechnet werden, wie viel 20 Thlr., die nach 15 Jahren zahlbar sind, heute werth sind, wenn 4 % Zinsen berechnet werden, so sucht man in der Tafel für 1 Thlr. ähnlich wie vorher den Werth 0,5552645 und multiplicirt denselben mit 20, wodurch man 11,105290 Thlr. erhält.

§. 4.

Bestimmung der Procente.

5. Beispiel.

Wenn man bei der Geburt eines Kindes an die Lebensversicherungsbank Janus in Hamburg die Summe von 33 Thlr. 8 Sgr. 3 Pf. ein für allemal entrichtet, so bekommt das Kind nach vollendetem 18. Lebensjahre die Summe von 100 Thlr. ausgezahlt. Wie hoch hat sich jene Einlage, falls das Kind das 18. Jahr wirklich erreicht, verinteressirt?

Es ist hier S = 100 Thaler, C = 33 Thlr. 8 Sgr. 3 Pf. = $\frac{1331}{40}$ Thaler, n = 18, welche Werthe in die Formel

$$e = \sqrt[n]{\frac{S}{C}}$$

einzusetzen sind. Wir erhalten also

$$e = \sqrt[18]{\frac{100}{\frac{1331}{40}}} = \sqrt[18]{\frac{4000}{1331}},$$

$$\log e = \tfrac{1}{18}(\log 4000 - 1331)$$

$$\log 4000 = 3{,}6020600$$
$$\log 1331 = 3{,}1241781$$
$$18) \quad \overline{0{,}4778819}$$
$$\log e = 0{,}0265490$$
$$e = 1{,}06304.$$

Nun ist $e = \frac{p+100}{100}$, also $p = 100 . e - 100 = 6{,}304$ %.

6. Beispiel.

Bei der Lübecker Lebensversicherungs-Gesellschaft sichert man einem Kinde nach erreichtem 18ten Lebensjahre eine Aussteuer von 100 Thlr., wenn man bei der Geburt des Kindes die Summe von 37 Thlr. 17 Sgr. einzahlt. Wie hoch verzinst sich dort das Anlagekapital?

Hier ist $C = 37$ Thlr. 17 Sgr. $= \frac{1027}{30}$ Thaler, das Uebrige ist wie vorher, wir haben also

$$e = \sqrt[18]{\frac{100}{\frac{1027}{30}}} = \sqrt[18]{\frac{3000}{1027}}.$$

$$\log 3000 = 3{,}4771213$$
$$\log 1027 = 3{,}0115704$$
$$18) \quad \overline{0{,}4655509}$$
$$\log e = 0{,}0258639$$
$$e = 1{,}0616, \text{ also } p = 6{,}136 \text{ \%}.$$

7. Beispiel.

In einer Stadt stieg die Bevölkerung in einem Zeitraume von 4 Jahren von 12325 auf 18045 Seelen. Um den wievielsten Theil nahm die Bevölkerung jährlich zu?

Es ist hier

$$e = \sqrt[4]{\frac{18045}{12325}}.$$

$$\log 18045 = 4{,}2563569$$
$$\log 12325 = 4{,}0907869$$
$$4) \quad \overline{0{,}1655700}$$
$$\log e = 0{,}0413925$$
$$e = 1{,}10, \text{ also } p = 10 \text{ \%}.$$

Die Bevölkerung nahm also um den 10ten Theil jährlich zu. —

Anmerk. Fallen die gesuchten Procente in das Bereich der in Taf. I. zu Grunde gelegten, so kann auch diese Tafel zur angenäherten Berechnung derselben benutzt werden. — Beispiel: ***Wenn 100 Thaler nach 10 Jahren zu 150 Rt. angewachsen sind, wie hoch haben sich dieselben verzinst?*** Man dividire mit 100 in 150, giebt 1,50 und suche diese Zahl in der zu 10 Jahren gehörigen Querspalte. Man findet daselbst 1,48 bei $4\frac{0}{0}$ und 1,55 bei $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$. Die 100 haben sich also c. zu $4\frac{1}{4}\frac{0}{0}$ verzinst.

§. 5.

Berechnung der Jahre.

8. Beispiel.

Ein Sterbender setzt zum Neubau der Kirche seines Ortes ein Legat von 18000 *Thalern aus. Nach der Veranschlagung des Baues kostet derselbe* 24738 *Thaler, man will daher, da das Kapital bei einer Bank Zins auf Zins zu* $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ *untergebracht werden kann, den Bau so lange verschieben, bis jenes auf die erforderliche Höhe gestiegen ist. Nach wie viel Jahren wird dies der Fall sein?*

Wir rechnen hier nach der Formel

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log e},$$

wo $S = 24783$, $C = 18000$ und $e = 1{,}0425$ ist.

$$\log 24783 = 4{,}3942415$$
$$\log 18000 = 4{,}2552725$$
$$0{,}1389690$$
$$\log 1{,}0425 \quad 0{,}0180761,$$

also $$n = \frac{0{,}1389690}{0{,}0180761} = \frac{1389690}{180761} = 7{,}68\ ..\ ^*).$$

Der Bau wird also nach ungefähr 8 Jahren beginnen können.

9. Beispiel.

Wenn man beim Janus in Hamburg für ein Kind, welches im 4ten Lebensjahre steht, die Summe von 42 *Thaler*

---

*) Da die Zinsen angenommenermaassen nur alljährlich zum Kapitale geschlagen werden, so können die Bruchtheile der Jahre nicht als gültig betrachtet werden. Der Controle beim Rechnen wegen, werden wir sie aber stets mit angeben.

14 Sgr. bezahlt, so erhält das Kind nach erreichtem 24sten Lebensjahre die Summe von 100 Thlr. ausgezahlt. Nach wie viel Jahren würde jene Einlage in einer Sparkasse, die $2\frac{3}{4}$ % giebt, zu 100 Thlr. anwachsen.

Wir haben hier $S = 100$, $C = 42$ Thlr. 15 Sgr. $= \frac{83}{2}$ Thlr., $e = 1{,}0275$, also

$$n = \frac{\log 100 - \log \frac{83}{2}}{\log 1{,}0275}$$

$$= \frac{\log 100 - \log 83 + \log 2}{\log 1{,}0275} .$$

$\log 100 = 2{,}0000000$
$\log 2 = 0{,}3010300$
$2{,}3010300$
$\log 83 = 1{,}9190781$
$0{,}3819519$
$\log 1{,}0275 = 0{,}0117818,$

$$\text{also } n = \frac{0{,}3819519}{0{,}0117818} = \frac{3819519}{117818}$$

$= 32{,}4\ldots$

Das Kind würde von der Sparkasse erst nach 34 Jahren, also in seinem 38sten Lebensjahre die Summe von 100 Thaler ausgezahlt erhalten.

Anmerk. Stehen die angenommenen Procente in Taf. I., so kann man auch die gesuchten Jahre mittelst dieser Tafel finden, indem man mit C in S dividirt und die Zahl in der zu den gegebenen Procenten gehörigen Vertikalreihe sucht. Die davorstehenden Jahre sind die gesuchten. Wählen wir das letzte Beispiel, so ist $\frac{S}{C} = \frac{200}{83}$ $= 2{,}409$. Suchen wir diese Zahl unter $2\frac{3}{4}$ %, so fällt sie zwischen 2,38.. und 2,44.., wozu die Jahre 32 und 33 gehören.

Zweites Kapitel.

Sparkassen-Rechnung und verwandte Rechnungsarten.

---

§. 6.

Theorie dieser Rechnungsart.

Wenn Jemand n Jahre hinter einander C Thlr. zinsbar anlegt und die Zinsen zu $p\frac{0}{0}$ zum Kapital schlägt, was wird er nach dieser Zeit erspart haben, wenn die alljährlichen Kapitalzahlungen am Ende jedes Jahres geschehen sind?

Wird, wie angegeben, am Ende des nten Jahres die Berechnung angestellt, so hat die erste Kapitalzahlung (n—1) Jahre ausgestanden, weil sie erst am Ende des ersten, d. h. am Anfange des zweiten Jahres erfolgte; sie ist demnach nach §. 1. angewachsen zu

$$C \cdot e^{n-1},$$

wenn e wieder die frühere Bedeutung hat. Man sieht ohne Weiteres ein, dass die nachfolgenden Einzahlungen bezüglich zu

$$C.e^{n-2},\quad C.e^{n-3},\quad C.e^{n-4}\ldots$$

angewachsen sind. Die vorletzte Einzahlung steht nur ein Jahr aus und vermehrt sich deshalb zu Ce, die letzte hingegen, welche am Ende des letzten Jahres erfolgte, hat noch gar keine Zinsen getragen und ist unverändert C Thlr. geblieben.

Hiernach sind die sämmtlichen Einzahlungen angewachsen zu der Summe

$$S = Ce^{n-1} + Ce^{n-2} + Ce^{n-3} + \ldots + Ce^3 + Ce^2 + Ce + C \ldots (7)$$

Um einen einfachen Ausdruck für S zu finden, multipliciren wir beide Seiten mit e und erhalten hierdurch

$$eS = Ce^n + Ce^{n-1} + Ce^{n-2} + \ldots Ce^4 + Ce^3 + Ce^2 + Ce \ldots (8).$$

Subtrahiren wir jetzt (7) von (8), so heben sich von (7) sämmtliche Glieder ausser dem letzten gegen sämmtliche in (8) auf das erste folgende, so dass wir haben

$$eS - S = Ce^n - C \quad \ldots \quad (9)$$

$$\text{oder} \quad (e-1)\,S = C\,(e^n-1)$$

oder endlich

$$S = C \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} \quad \ldots \quad (10)$$

Sind von den Werthen S, C, e, n drei gegeben, so lässt sich mit Hülfe der Formel (10) der vierte berechnen. Ist C, e, n gegeben, so giebt die Formel in ihrer jetzigen Form unmittelbar den Werth für S an; ist hingegen S, e, n gegeben, so ergiebt sich leicht

$$C = S \cdot \frac{e-1}{e^n-1} \quad \ldots \quad (11).$$

Wäre S, C und e gegeben, und sollte n bestimmt werden, so hat man aus (10)

$$\frac{S\,(e-1)}{C} + 1 = e^n$$

$$\log\left\{\frac{S\,(e-1)}{c} + 1\right\} = n \log e,$$

$$n = \frac{\log\left\{\frac{S\,(e-1)}{c} + 1\right\}}{\log e} \quad \ldots \quad (12).$$

Wäre endlich S, C und n gegeben, und sollten die Procente durch e gefunden werden, so hat man aus (9)

$$Ce^n - Se + S - C = 0$$

$$\text{oder} \quad e^n - \frac{S}{C} \cdot e + \frac{S-C}{C} = 0 \quad \ldots \quad (13).$$

Der Werth von e wäre demnach durch eine Gleichung vom nten Grade zu bestimmen. Wir werden jedoch bei den späteren Beispielen für diesen Fall die Lösung nicht nach den Regeln der höheren Algebra ausführen, sondern dadurch, dass wir den gesuchten Werth zwischen immer engere und engere Grenzen einschliessen.

§. 7.

Bestimmung der Gesammtersparniss.

10. Beispiel.

Jemand legt zu Ende jedes Jahres 20 *Jahre hinter einander* 5 *Thlr. in eine Sparkasse, welche* 3 $\frac{0}{0}$ *Zinsen giebt, wie gross ist seine Ersparniss nach dieser Zeit?*

Wir haben nach (10)

$$S = \frac{5 \,.\, 1{,}03^{20} - 1}{0{,}03} = \frac{500\,(1{,}03^{20} - 1)}{3}\,.$$

Da der zu berechnende Ausdruck nicht logarithmisch ist, so hat man erst $1{,}03^{20}$ für sich durch Logarithmen zu berechnen, davon 1 zu subtrahiren und den nunmehrigen Ausdruck für S mit Hülfe der Logarithmen zu berechnen.

$$\begin{array}{rl} \log\ 1{,}03 & = 0{,}0128372 \\ \log\ 1{,}03^{20} & = 0{,}256744 \\ 1{,}03^{20} & = 1{,}8061\,, \end{array} \quad (20$$

*)

$$\text{also} \quad S = \frac{500 \,.\, 0{,}8061}{3} = 500 \,.\, 0{,}2687$$

$$\begin{array}{rl} \log\ 500 & = 2{,}6989700 \\ \log\ 0{,}2687 & = 0{,}4292677 - 1 \\ \log\ S & = 2{,}1282377 \\ S & = 134{,}35. \end{array}$$

11. Beispiel.

Jemand, der sich bei einem Eisenbahnunternehmen betheiligt hat, hat auf seine 7 *Aktien à* 100 *Thlr. am Ende jedes Jahres in* 4 *Raten jedesmal* 175 *Thlr. einzahlen müssen. Nach vollendetem Bau, welcher* 6 *Jahre gedauert hat, geht die Bahn gegen eine dem Kostenbetrage gleichkommende Entschädigungssumme an den Staat über. Was hat der Mann eingebüsst, wenn* 4 $\frac{0}{0}$ *gerechnet werden.*

Am Ende des vierten Jahres beläuft sich seine Leistung auf $S = 175 \,.\, \frac{1{,}04^4 - 1}{0{,}04} = 4375 \,.\, (1{,}04^4 - 1).$

Dazu kommen noch die Zinsen für anderweite zwei Jahre, folglich seine Gesammtleistung

*) Kann auch mittelst der Taf. I. gefunden werden.

$$S \cdot 1{,}04^2 = 4375 \cdot (1{,}04^4 - 1) \cdot 1{,}04^2.$$

Als Entschädigung bekommt er nur seine baare Einzahlung im Betrage von 700 Thlr. wieder, er verliert also, wenn wir seinen Verlust mit V bezeichnen:

$$V = 4375 \cdot (1{,}04^4 - 1) \cdot 1{,}04^2 - 700.$$

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$4\log 1{,}04 = 0{,}0681332$$
$$1{,}04^4 = 1{,}16985,$$

also $V = 4375 \cdot 0{,}16985 \cdot 1{,}04^2 - 700.$

$$\log 4375 = 3{,}6409781$$
$$\log 0{,}16985 = 0{,}2300656 - 1$$
$$2 \log 1{,}04 = 0{,}0340666$$
$$2{,}9051103.$$

Hierzu ist der

Numerus = 803,73
davon 700
bleibt V = 103,73 . . Thlr.

§. 8.

Bestimmung der jährlichen Einzahlung.

12. Beispiel.

Eine Stadt nimmt in einer Bank ein Kapital von 42000 *Thaler auf, unter der Bedingung, dasselbe durch eine am Ende jedes Jahres aus den Ueberschüssen der Stadtkasse zu zahlende Rate in* 20 *Jahren zu tilgen. Wie hoch wird sich die Rate belaufen müssen, wenn die Bank verausgabte Gelder mit* $4\,\frac{0}{0}$, *vereinnahmte dagegen mit* $3\frac{3}{4}\,\frac{0}{0}$ *in Rechnung bringt?*

Es ist hierbei zunächst zu erwägen, dass die Summe, zu welcher das geliehene Kapital in 20 Jahren anwächst, gleich sein muss der Summe, zu welcher die zu zahlenden Raten in dieser Zeit anwachsen.

Da die 42000 Thaler, als von der Bank verausgabte Gelder mit $4\,\frac{0}{0}$ berechnet werden, so wachsen dieselben an zu

$$42000 \cdot 1{,}04^{20} \ldots . \quad (14)$$

Bezeichnet ferner C den jährlichen Tilgungsbetrag, so steigt dieser bei $3\frac{3}{4}\,\frac{0}{0}$ in 20 Jahren zu der Summe von

$$S \cdot \frac{1{,}0375^{20} - 1}{0{,}0375} \quad \ldots \quad (15).$$

Da nun (14) und (15) gleich sein müssen, so haben wir

$$42000 \cdot 1{,}04^{20} = C \cdot \frac{1{,}0375^{20} - 1}{0{,}0375},$$

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \\ \log\ 1{,}0375^{20} &= 0{,}319762 \quad (20 \\ 1{,}0375^{20} &= 2{,}08815, \end{aligned}$$

mithin ist

$$42000 \cdot 1{,}04^{20} = C \cdot \frac{1{,}08815}{0{,}03750} = C \cdot \frac{108815}{3750}$$

folglich $$C = \frac{42000 \cdot 1{,}04^{20} \cdot 3750}{108815}$$

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ \log\ 1{,}04^{20} &= 0{,}3406660 \quad (20 \\ \log\ 42000 &= 4{,}6232493 \\ \log\ 3750 &= 3{,}5740313 \\ & \quad 8{,}5379466, \text{ davon} \\ \log 108815 &= 5{,}0366888, \\ \log\ C &= 3{,}5012578, \end{aligned}$$

wozu der Numerus ist:

$$C = 3171{,}45 \text{ Thlr.}$$

13. Beispiel.

Jemand entschliesst sich in seinem 26. *Lebensjahre durch eine am Ende jedes Jahres in eine Sparkasse, die* $3\frac{1}{2}\,\%$ *Zinsen giebt, zu machende Einlage so viel zu ersparen, dass er zu Anfange des* 40. *Lebensjahres sich bei der Janusgesellschaft in Hamburg mit* 3695 *Thlr. eine vom* 50*sten Lebensjahre an beginnende Pension von* 400 *Thlr. versichern kann. Welche jährliche Einlage hat derselbe in die Sparkasse zu machen?*

Da am Ende des 39sten Lebensjahres das Geld erspart sein muss, so hat er im Ganzen 14 Einlagen zu machen, es ist deshalb in der Formel

$$S = C\,\frac{e^n - 1}{e - 1} \quad \text{oder} \quad \frac{S\,(e-1)}{e^n - 1} = C$$

$S = 3695$, $e = 1{,}035$, $n = 14$ und C gesucht. Wir haben also:

$$C = \frac{3695 \,.\, 0{,}035}{1{,}035^{14} - 1} \,.$$

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\ \log\ 1{,}035^{14} &= 0{,}2091642 \\ 1{,}035^{14} &= 1{,}61869, \end{aligned}$$ (14

$$\text{mithin } C = \frac{3695 \,.\, 0{,}035}{0{,}61869} = \frac{3695 \,.\, 35}{618{,}69} \,.$$

$$\begin{aligned} \log\ 3695 &= 3{,}5676144 \\ \log\ 35 &= 1{,}5440680 \\ & \hline 5{,}1116824 \\ \log 618{,}69 &= 2{,}7914731 \\ & \hline \log C = 2{,}3022093, \\ C &= 209{,}03 \ldots \text{Thlr.} \end{aligned}$$

§. 9.

Bestimmung der Jahre.

14. Beispiel.

Ein Vater will seinem Kinde vom zweiten Lebensjahre ab bei der Lübecker Bank eine im 18. *Lebensjahre zahlbare Aussteuer von* 400 *Thlr. gegen eine jährliche Prämie von* 18 *Thlr. sichern. Es wird ihm gerathen, die* 18 *Thlr. lieber in eine Sparkasse, welche* $3\frac{1}{3}$ *% giebt zu legen, deshalb möchte er wissen, in welchem Lebensjahre dem Kinde von der Sparkasse* 400 *Thlr. ausgezahlt werden würden, wenn er in letztere am Ende jedes Jahres* 18 *Thlr. einzahlte?*

Wir haben hier $S = 400$, $C = 18$, $e = 1{,}0333\ldots$ und n ist gesucht, also ist

$$400 = 18\,\frac{(1{,}033\,..^{n} - 1)}{0{,}0333\,..}$$

$$\text{oder } \frac{400 \,.\, 0{,}0333\,..}{18} + 1 = 1{,}0333\,..^{n}.$$

$$\begin{aligned} \log\ 400 &= 2{,}6020600 \\ \log\ 0{,}0333\,.. &= 0{,}5228783 - 2 \\ & \hline 3{,}1249383 - 2 \\ \log\ 18 &= 1{,}2552725 \\ & \hline 0{,}8696658 - 1 \end{aligned}$$

Der Numerus hierzu ist

$$0{,}74074,$$

wir haben demnach

$$1{,}0333\ldots^{n} = 1{,}74074$$

$$n = \frac{\log 1{,}74074}{\log 1{,}03333}$$

$$= \frac{0.2407339}{0{,}0142390}$$

$$= 16{,}9\ldots$$

Die Sparkasse würde also dem Kinde nach ungefähr 17 Jahren, d. h. also im 19ten Lebensjahre die Summe von 400 Thaler auszahlen.

15. Beispiel.

Beim Janus in Hamburg werden Jemandem, für welchen von dessen Geburt ab alljährlich 6 *Thlr. entrichtet werden, im* 50 *Lebensjahre* 1000 *Thlr. ausgezahlt. Nach wie viel Jahren würde ein am Ende jedes Jahres in eine Sparkasse, welche* 3 % *Zinsen berechnet, gelegter Beitrag von* 6 *Thlr. zu* 1000 *Thlr. anwachsen?*

Wir haben hier $S = 1000$, $C = 6$, $e = 1{,}03$ und n ist gesucht, also

$$1000 = \frac{6\ (1{,}03^{n}-1)}{0{,}03}$$

$$5 = 1{,}03^{n}-1$$

$$6 = 1{,}03^{n}$$

$$n = \frac{\log 6}{\log 1{,}03}$$

$$= \frac{0{,}7781513}{0{,}0128372} = 60{,}6.$$

Die Sparkasse würde also ungefähr im 61. Lebensjahre die besagte Summe zahlen können.

§. 10.

Berechnung der Zinsen.

Sind in der Formel

$$S = \frac{C\ (e^{n}-1)}{e-1}$$

S, C und n gegeben und ist e gesucht, so kann letzteres

mit Hülfe einer Gleichung vom (n—1)ten Grade gefunden werden. Nach den Regeln der algebr. Division ist nämlich

$$\frac{e^n-1}{e-1} = e^{n-1} + e^{n-2} + .. + e^3 + e^2 + e + 1,$$

also $e^{n-1} + e^{n-2} + .. + e^2 + e + 1 = \frac{S}{C}$.

Die Lösung einer solchen Gleichung ist zwar unter allen Umständen möglich, wird aber um so schwieriger, je höher der Grad der Gleichung, d. h. also je grösser n ist.

16. Beispiel.

Bei einem Hausverkaufe wird dem Käufer frei gestellt, jetzt gleich 3000 *Thlr. zu erlegen, und das zweite und dritte Jahr zu derselben Zeit eine gleiche Summe, oder zur Zeit des letzten Termins in einer Summe* 9500 *Thlr. zu entrichten. Da der Käufer seine Gelder in seinem Geschäfte mit* 8 % *Nutzen verwenden kann, so möchte er wissen, auf welche der Bedingungen er, um seinen Vortheil zu wahren, eingehen müsse?*

Es ist hier zu ermitteln, was die Partial-Einzahlungen für Zinsen tragen. Es ist demnach in der Formel

$$S = \frac{C\ (e^n-1)}{e-1}$$

$S = 9500$, $C = 3000$, $n = 3$ und e gesucht, also

$$9500 = 3000 \cdot \frac{e^3-1}{e-1},$$

$$\frac{19}{6} = e^2 + e + 1,$$

$$\frac{13}{6} = e^2 + e,$$

$$e = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{13}{6}}\ *)$$

$$= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{87}{36}}.$$

---

*) S. mein Lehrbuch der Arithmetik. 2. Aufl. §. 194. III.

$$\sqrt{\frac{87}{36}} = \frac{\sqrt{87}}{6} = \frac{9{,}3273791}{6}$$

$$= 1{,}5545632$$

$$e = 1{,}5545632 - \tfrac{1}{2}$$

$$= 1{,}5545632 - 0{,}5$$

$$= 1{,}0545632.$$

Bezeichnen demnach p die Procente, so ist

$$p = 5{,}45632.$$

Die Partial-Einzahlungen tragen demnach c . $5\frac{1}{2}$ %, deshalb wird der Käufer die Zahlung in einer Summe vorzuziehen haben.

17. Beispiel.

Jemand hat 4 *Eisenbahnaktien à* 100 *Thlr. in* 4 *Jahren hinter einander einzeln bezahlt, und verkauft dieselben nach der letzten Einzahlung für* 464 *Thlr. Wie viel Procent hat sein Geld getragen?*

In der Formel

$$S = C \cdot \frac{e^4 - 1}{e - 1}$$

ist $S = 464$, $C = 100$, $n = 4$ und e gesucht, also haben wir

$$464 = 100\,\frac{e^4 - 1}{e - 1},$$

$$\text{oder} \quad 4{,}64 = e^3 + e^2 + e + 1$$

$$\text{oder} \quad e^3 + e^2 + e - 3{,}64 = 0.$$

Bringen wir diese Gleichung auf die reducirte Form, indem wir

$$e = y - \tfrac{1}{3}$$

einsetzen, so haben wir

$$e^3 = y^3 - y^2 + \tfrac{1}{3}\,y - \tfrac{1}{27}$$

$$e^2 = y^2 - \tfrac{2}{3}\,y + \tfrac{1}{9}$$

$$e = y - \tfrac{1}{3}$$

$$-3{,}64 = -3{,}64$$

$$0 = y^3 + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} + 1)\,y - \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{3} - 3{,}64,$$

$$\text{oder } y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{10528}{2700} = 0 \ldots\ (16).$$

Wir haben also eine Gleichung von der Form

$$y^3 + py - q = 0$$

und mithin nach der Cardanischen Formel *)

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (17)$$

Wählen wir die Lösung mittelst goniometrischer Funktionon, so haben wir zunächst einen Hülfswinkel φ zu berechnen mittelst der Formel

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{q}\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 \ldots\ (18),$$

hierauf einen zweiten ψ mittelst der Formel

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} \ldots\ (19),$$

und endlich den Werth für y nach der Formel

$$y = 2 \cot 2\psi \sqrt{\frac{p}{3}} \ldots\ (20).$$

In unserem Falle ist nun

$$p = \frac{2}{3} \text{ und } q = \frac{10528}{2700},$$

$$\text{also } \frac{2}{q} = \frac{2700}{5264} \ldots\ (21),$$

$$\frac{p}{3} = \frac{2}{9},$$

$$\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 = \frac{(\sqrt{2})^3}{27} = \frac{2\sqrt{2}}{27} \ldots\ (22).$$

Setzen wir die Werthe (21) und (22) in (18) ein, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2700.2.\sqrt{2}}{5264.27} = \frac{5400\ .\sqrt{2}}{5264\ .\ 27};$$

---

*) Vergl. mein *Lehrb. d. algebr. Analysis.* §. 102. II.

$$\log 5400 = 3{,}7323938$$
$$\log \sqrt{2} = \tfrac{1}{2} \log 2 = 0{,}1505150$$
$$3{,}8829088 \ldots \quad (23)$$
$$\log 5264 = 3{,}7213159$$
$$\log 27 = 1{,}4313638$$
$$5{,}1526797 \ldots \quad (24)$$

Zählen wir in (23) behufs der Anwendung der trigonometrischen Tafeln 10 zu und subtrahiren dann (24), so haben wir

$$13{,}8829088$$
$$5{,}1526797$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 8{,}7302291 - 10$$
$$\varphi = 3^0\ 4'\ 32'',3.$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi = 1^0\ 32'\ 16'',1 \ldots \quad (25)$$

Setzen wir den Werth aus (25) in (19) ein, so haben wir

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 1^0\ 32'\ 16'',1.}$$
$$\log \operatorname{tg} 1^0\ 32'\ 16'',1 = 8{,}4288829 - 10.$$

Zählen wir, da noch durch 3 dividirt werden muss, 20 zu, so erhalten wir

$$3) \quad 28{,}4288829 - 30$$
$$\log \operatorname{tg}\psi = 9{,}4762943 - 10$$
$$\psi = 16^0\ 40'\ 9'',2$$
$$2\psi = 33^0\ 20'\ 18'',4 \ldots \quad (26).$$

Setzen wir endlich (26) in (20) ein und berücksichtigen, dass

$$\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ist, so erhalten wir

$$y = \frac{2\sqrt{2} \cdot \cot 33^0\ 20'\ 18'',4}{3} \ldots (27).$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \sqrt{2} = 0{,}1505150$$
$$\log \cot 33^0\ 20'\ 18'',4 = 10{,}1818809 - 10$$
$$0{,}6334259$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log y = 0{,}1563046$$
$$y = 1{,}433 \ldots$$

$$\text{Nun ist } e = y - \tfrac{1}{3} = 1{,}433 - 0{,}333$$
$$= 1{,}10,$$

und wenn p wieder die Procente bezeichnen

$$p = 10.$$

Die eingezahlten Aktien haben demnach 10 % Zinsen getragen.

Anmerkung. Die beiden anderen Wurzeln der cubischen Gleichung sind imaginär. Um sie auch noch zu bestimmen, wählen wir den einfachsten Weg, indem wir die Gleichung

$$e^3 + e^2 + e - 3{,}64 = 1$$

durch $e - 1{,}1$ dividiren. Die Division ergiebt

$$e^2 + 2{,}1\, e + 3{,}31.$$

Setzen wir diesen Ausdruck $= 0$ und lösen die quadratische Gleichung

$$e^2 + 2{,}1\, e + 3{,}31 = 0$$

auf, so erhalten wir die beiden Wurzeln

$$e = -1{,}05 \pm i\sqrt{2{,}21},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ gesetzt ist.

Führt die Aufgabe auf eine Gleichung, welche den dritten Grad übersteigt, so wird man statt des beschwerlichen Weges der direkten Lösung, lieber ein Verfahren wählen, nach welchem man das gesuchte *e* zwischen immer engere und engere Grenzen schliesst. Wir werden später Gelegenheit nehmen, ein solches Verfahren zu zeigen.

Drittes Kapitel.

Rechnung bei Lebens-, Aussteuer- und Capitals-Versicherungen.

---

§. 11.

Theorie dieser Rechnungsart.

Bei den obengenannten Versicherungen werden die Beiträge pränumerando zu Anfange jedes Jahres gezahlt, während der Rechnungsabschluss am Jahresende erfolgt. Nehmen wir nun an, es würden n Jahre hinter einander zu Anfange eines jeden C Thlr. in eine Bank gezahlt, so fragt es sich, wenn $p\,\%$ gerechnet werden und S die gesammte Leistung des Beitragenden bezeichnet, was für eine Relation zwischen den Grössen S, C, n und e, wo wieder

$$e = \frac{p + 100}{100}$$

gesetzt ist, stattfindet. Es ist nach dem Früheren klar, dass die einzelnen Beiträge anwachsen werden zu

$$Ce^n,\ Ce^{n-1},\ Ce^{n-2},\ \ldots\ Ce^3,\ Ce^2,\ Ce;$$

die Gesammtleistung ist demnach

$$S = Ce^n + Ce^{n-1} + Ce^{n-2} + .. + Ce^3 + Ce^2 + Ce$$
$$= e\,(Ce^{n-1} + Ce^{n-2} + Ce^{n-3} + .. + Ce^2 + Ce + C).$$

Mit Rücksicht auf (7) und (10) ist demnach

$$S = \frac{C \,.\, e\,(e^n - 1)}{e - 1} \quad \ldots \quad (28).$$

Dies ist die Formel, nach der wir hier zu rechnen haben werden.

§. 12.

Berechnung der Gesammtleistung.

18. Beispiel.

In der Lübecker- und Berliner Lebensversicherungsbank hat Jemand, der sich in seinem 32. *Lebensjahre versichert pro* 100 *Thlr. Versicherungssumme* 2 *Thlr.* 23 *Sgr.* 8 *Pf. zu bezahlen. Gesetzt nun, es hätte sich Jemand bei einer dieser Banken mit* 9000 *Thaler versichert und stürbe nach zurückgelegtem* 47. *Lebensjahre, was hat er dann in Summa eingesteuert, wenn* 4 % *Zinsen gerechnet werden?* *)

Wir haben hier C = 2 Thlr. 23 Sgr. 8 Pf. × 90 = 251 Thlr., ferner, da im 32. Jahre die erste und im 47. die letzte Prämie gezahlt worden ist, n = 16, endlich e = 1,04; wir haben also zu berechnen:

$$S = \frac{251 \,.\, 1{,}04\,(1{,}04^{16} - 1)}{0{,}04}$$

$$= 251 \,.\, 26 \,.\, (1{,}04^{16} - 1).$$

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$$

$$\log 1{,}04^{16} = 0{,}2725328 \quad (16$$

$$1{,}04^{16} = 1{,}87298,$$

$$\text{also} \quad S = 251 \,.\, 26 \,.\, 0{,}87298$$

$$\log 251 = 2{,}3996737$$

$$\log 26 = 1{,}4149733$$

$$\log 0{,}87298 = 0{,}9410043 - 1$$

$$\log S = 3{,}7556513$$

$$S = 5697 \text{ Thlr.}$$

Anmerk. Tafel III. enthält die künftigen Werthe der Einlage 1 nach 1 bis 100 Jahren. Um voriges Beispiel mit Hülfe dieser Tafel zu berechnen, hat man in der mit 4 % überschriebenen Spalte den zu 16 Jahren gehörigen Werth zu suchen; dieser ist 22,697512. Nun ist in unserem Falle die Einlage nicht 1 Thlr., sondern 251 Thlr., folglich ist der gefundene Werth mit 251 zu multipliciren, was ebenfalls 5697 Thlr. giebt.

---

*) Die Versicherten geniessen bei allen Versicherungs-Banken Dividenden und es kommen diese also natürlich von der oben gesuchten Summe noch in Abzug.

19. Beispiel.

Wer sich in seinem 26. *Lebensjahre mit Anspruch auf Dividenden versichert hat pro* 100 *Thlr. in der Leipziger und Gothaer Bank* 2 *Thlr.* 12 *Sgr.* 3 *Pf. und beim Janus in Hamburg* 2 *Thlr.* 7 *Sgr.* 6 *Pf. als jährliche Prämie zu zahlen. Gesetzt nun Jemand, der sich in allen drei Banken in jenem Alter versichert hätte, stürbe nach erreichtem* 45. *Lebensjahre, wie viel hätte derselbe auf jede* 100 *Thlr., die seine Erben ausgezahlt erhalten, bereits eingezahlt, wenn* 4 % *gerechnet werden?*

I. Berechnung für die Leipziger und Gothaer Bank.

In der Formel

$$S = \frac{C \,.\, e \,.\, (e^n - 1)}{0{,}04}$$

ist $C = 2$ Thlr. 12 Sgr. 3 Pf. $= \frac{289}{120}$ Thlr., $e = 1{,}04$ und $n = 20$ zu setzen, S wird gesucht; wir haben daher

$$S = \frac{289}{120} \cdot \frac{1{,}04\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

$$= \frac{289 \,.\, 26 \,.\, (1{,}04^{20} - 1)}{120}.$$

$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$

$\log 1{,}04^{20} = 0{,}340666$ (20

$1{,}04^{20} = 2{,}1911$,

also $S = \frac{289 \,.\, 26 \,.\, 1{,}1911}{120}$.

$\log 289 = 2{,}4608978$

$\log 26 = 1{,}4149733$

$\log 1{,}1911 = 0{,}0759482$

$3{,}9518193$

$\log 120 = 2{,}0791812$

$\log S = 1{,}8726381$

$S = 74{,}58 \ldots$

Bei diesen Banken gewinnen demnach die Erben von jedem Hundert ausser den Dividenden c. 25 Thlr.

II. Berechnung beim Janus.

Es ist hier C = 2 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. = $\frac{9}{4}$ Thlr., das Uebrige dagegen wie vorher; wir haben deshalb mit Benutzung der vorher gewonnenen Resultate

$$S = \frac{9.26.1{,}1911}{4} .$$

$$\begin{aligned} \log 9 &= 0{,}9542425 \\ \log 26 &= 1{,}4149733 \\ \log 1{,}1911 &= 0{,}0759482 \\ \hline & 2{,}4451640 \\ \log 4 &= 0{,}6020600 \\ \hline \log S &= 1{,}8431040 \\ S &= 69{,}679 \ldots \end{aligned}$$

Beim Janus gewinnen demnach die Erben ausser den Dividenden an jedem Hundert c. 30 Thlr.

20. Beispiel.

Beim Janus findet noch eine Versicherung ohne Anspruch auf Dividenden Statt, und es hat bei dieser Jemand, der sich im 26. *Lebensjahre versichert, jährlich* 2 *Thlr. Prämie zu zahlen. Wie viel würden hier die Erben am Hundert profitiren, wenn der Versicherte im angetretenen* 46. *Lebensjahre stürbe?*

Rechnen wir wieder zu 4 %, so ist $e = 1{,}04$, $C = 2$, $n = 20$, also

$$S = 2.26.(1{,}04^{20} - 1)$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log 26 &= 1{,}4149733 \\ \log (1{,}04^{20} - 1) &= 0{,}0759482 \\ \hline S &= 61{,}93 \ldots \end{aligned}$$

Die Erben würden also an jedem Hundert c. 38 Thaler profitiren.

§. 13.

Berechnung der jährlichen Zahlung.

21. Beispiel.

Hat sich Jemand mit 100 *Thlr. in Gotha oder Leipzig im* 26. *Lebensjahre mit Anspruch auf Dividenden versichert und stirbt im angetretenen* 46. *Lebensjahre, so hat er durch Prämienzahlung in Summa geleistet* 75 *Thlr.; hätte er dagegen dies beim Janus ohne Anspruch auf Dividenden gethan, so würde er in Summa nur* 62 *Thlr. geleistet haben. Nehmen wir nun an, dass in Gotha, Leipzig und Hamburg gleichgünstige Versicherungsverhältnisse stattfänden, so müsste der Mehrbetrag von* 13 *Thlr. in den beiden ersteren Städten durch gezahlte Dividenden gedeckt worden sein. Es fragt sich nun, wie viel der Versicherte alljährlich im Durchschnitt als Dividende erhalten haben müsste, wenn berücksichtigt wird, dass erst zu Anfange des* 6. *Jahres nach Abschluss der Versicherung die Dividendenvertheilung beginnt?*

Da der Versicherte die ersten 5 Jahre keine Dividenden geniesst, so ist hier $n = 15$, ferner $S = 13$, $e = 1{,}04$ und C ist gesucht. Wir haben deshalb

$$13 = \frac{C \,.\, 1{,}04\,(1{,}04^{15}-1)}{0{,}04}$$

$$= C \,.\, 26 \,.\, (1{,}04^{15}-1),$$

$$\text{mithin } C = \frac{13}{26\,.\,(1{,}04^{15}-1)}\,.$$

$$\log\ 1{,}04 = 0{,}0170333$$

$$\log 1{,}04^{15} = 0{,}2554995 \quad (15$$

$$1{,}04^{15} = 1{,}80094,$$

$$\text{mithin } C = \frac{13}{26\,.\,0{,}80094}$$

$$= \frac{1300000}{26\,.\,80094}$$

$$\log\ 1300000 = 6{,}1139434 \ldots \quad (29)$$

$$\log\ 26 = 1{,}4149733$$

$$\log\ 80094 = 4{,}9036000$$

$$6{,}3185733 \ldots \quad (30).$$

Ziehen wir (30) von (29) ab, so erhalten wir

$$\log C = 0{,}7953701 - 1$$
$$C = 0{,}62426 \text{ Thlr. oder circa}$$
$$C = 18 \text{ Sgr.}$$

Berechnen wir dies nach Procenten der Jahresprämie, so haben wir

$$\frac{289}{120} : \frac{3}{5} = 100 : x;$$

woraus sich $x = 24{,}9$ ergiebt. Die Verhältnisse würden also gleichgünstig sein, wenn in Gotha und Leipzig c. 25 % von der Jahresprämie als Dividende restituirt würden.

22. Beispiel.

Wenn die jährlichen Feldfrüchte eines Gutsbesitzers im Durchschnitt einen Werth von 15750 *Thlr. haben und eine Hagelassekuranz-Gesellschaft annähme, dass eine Feldmark durchschnittlich alle* 20 *Jahre total verhagelt würde, wie hoch müsste letztere die jährliche Versicherungsprämie ansetzen, wenn* $3\frac{1}{2}$ % *Zinsen berechnet werden?*

Da die Prämien zu Anfange jedes Jahres bezahlt werden müssen, so haben wir wieder nach der Formel

$$S = \frac{C \,.\, e\,(e^n - 1)}{e - 1}$$

zu rechnen, und zwar ist $S = 15750$, $n = 20$, $e = 1{,}035$ und C ist gesucht, mithin ist

$$15750 = \frac{C \,.\, 1{,}035\,(1{,}035^{20} - 1)}{0{,}035}$$
$$= \frac{C \,.\, 1035\,(1{,}035^{20} - 1)}{35},$$

$$\text{folglich } C = \frac{15750 \,.\, 35}{1035 \,.\, (1{,}035^{20} - 1)}.$$

$$\log 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$\log 1{,}035^{20} = 0{,}298806 \quad (20$$
$$1{,}035^{20} = 1{,}98976,$$

deshalb

$$C = \frac{15750 \,.\, 35}{1035 \,.\, 0{,}98976}$$

$$\log 15750 = 4{,}1972806$$
$$\log 35 = 1{,}5440680$$
$$5{,}7413486 \ldots \quad (31)$$
$$\log 1035 = 3{,}0149403$$
$$\log 0{,}98976 = 0{,}9955299 - 1$$
$$3{,}0104702 \ldots \quad (32).$$

Wird (32) von (31) abgezogen, so erhalten wir

$$\log C = 2{,}7308784$$
$$C = 538{,}1 \ldots$$

Die jährliche Prämie müsste demnach jährlich c. 538 Thlr. betragen, d. h. also c. $3\frac{2}{5}$ % der Versicherungsumme.

Anmerkung. Auch die Beispiele 21 und 22 lassen sich mit Hülfe der Tafel III. berechnen. Man findet nämlich in derselben den Werth von $\frac{1{,}04\ (1{,}04^{15}-1)}{0{,}04} = 20{,}392742$ und hat deshalb bei ersterem $C = \frac{13}{20{,}392749} = 0{,}62426$. Beim zweiten findet man $\frac{1{,}035\,(1{,}035^{20}-1)}{0{,}035} = 29{,}269741$ und hieraus $C = \frac{15750}{29{,}269741} = 538{,}1$.

§. 14.

Berechnung der Jahre.

23. Beispiel.

Bei Verzichtleistung auf Dividenden hat Jemand, der sich im 33. *Lebensjahre beim Janus mit* 100 *Thlr. versichert, eine jährliche Prämie von* 2 *Thlr.* 12 *Sgr. zu zahlen. Nehmen wir* $3\frac{3}{4}$ %*) *Zinsen an, so fragt es sich, was die Gesellschaft als mittleres Lebensalter bei Personen, die im* 33. *Lebensjahre noch vollkommen gesund sind, annimmt?*

Wir haben hier $S = 100$, $C = 2$ Thlr. 12 Sgr. $= \frac{12}{5}$ Thlr., $e = 1{,}0375$ und n ist gesucht, also

*) Höher wird man den Zinsfuss nicht stellen können, da die Gesellschaft nicht alle Gelder zinsbar anlegen und der ihr dadurch erwachsende Verlust deshalb wohl recht gut mit $\frac{1}{4}$ % veranschlagt werden kann.

$$100 = \frac{12 . 1{,}0375\,(1{,}0375^n - 1)}{5 . 0{,}0375}$$

$$= \frac{12 . 10375\,(1{,}0375 - 1)}{5 . 375},$$

$$\frac{500 . 375}{12 . 10375} + 1 = 1{,}0375^n.$$

$$\log 500 = 2{,}6989700$$
$$\log 375 = 2{,}5740313$$
$$5{,}2730013 \ldots \quad (33).$$

$$\log 12 = 1{,}0791812$$
$$\log 10375 = 4{,}0159881$$
$$5{,}0951693 \ldots \quad (34).$$

Subtrahiren wir (34) von (33) so erhalten wir

$$0{,}1778320;$$

Hierzu ist der

$$\text{Num.} = 1{,}50603,$$

also ist

$$2{,}50603 = 1{,}0375^n,$$

$$n = \frac{\log 2{,}50603}{\log 1{,}0375}$$

$$= \frac{0{,}3989863}{0{,}0159881}$$

$$= \frac{3989863}{159881} = 24{,}9.$$

Es ist also die Versicherungssumme in c. 25 Jahren durch die Prämien gedeckt, es wird also $33 + 25 = 58$ Jahre als mittleres Lebensalter angenommen.

24. Beispiel.

Bei einer Versicherung mit Anspruch auf Dividenden ist im 33. *Lebensjahre beim Janus für* 100 *Thlr. als jährliche Prämie* 2 *Thlr.* 21 *Sgr. zu entrichten. Nach wie viel Jahren ist bei* $3\frac{3}{4}$ % *das versicherte Capital durch Prämien gedeckt?*

Es ist hier $S = 100$, $C = 2{,}7$, $e = 1{,}0375$, n gesucht, mithin

$$100 = \frac{2{,}7 \,.\, 10375\,(1{,}0375^n - 1)}{375},$$

$$\frac{37500}{2{,}7 \,.\, 10375} + 1 = 1{,}0375^n.$$

$$\log 37500 = 4{,}5740313 \ldots \quad (35)$$
$$\left.\begin{aligned}\log 2{,}7 &= 0{,}4313638\\ \log 10375 &= 4{,}0159881\end{aligned}\right\}$$
$$4{,}4473519 \ldots \quad (36).$$

(36) von (35) subtrahirt, giebt:

$$0{,}1266794,$$

davon ist der

$$\text{Numerus} = 1{,}33869$$

folglich

$$2{,}33869 = 1{,}0375^n,$$

$$n = \frac{\log\ 2{,}33869}{\log\ 1{,}0375} = \frac{0{,}3689726}{0{,}0159881}$$

$$= \frac{3689726}{159881} = 23{,}0 \ldots$$

Nach c. 23 Jahren ist demnach die Versicherungssumme durch Prämien absorbirt.

25. Beispiel.

Bei der Alter-Versorgungs-Gesellschaft zu Breslau bekommt derjenige, der in seinem 33. *Lebensjahre die Summe von* 827 *Thlr. einzahlt, von seinem* 50. *Lebensjahre ab bis zum Tode zu Anfange jedes Jahres eine Pension von* 100 *Thalern ausgezahlt. Nach wie viel Jahren wird derselbe, wenn* 4 % *Zinsen gerechnet werden, durch gezogene Pensionen das Einlage-Capital absorbirt haben?*

Wir haben hier $S = 827$, $C = 100$, $e = 1{,}04$ und n ist gesucht, also

$$827 = 100 \,.\, \frac{1{,}04\,(1{,}04^n - 1)}{0{,}04}$$

$$= 100 \,.\, 26 \,.\, (1{,}04^n - 1),$$

$$\frac{827}{2600} + 1 = 1{,}04^n.$$

$$\log 827 = 2{,}9175055$$
$$\log 2600 = 3{,}4149733$$
$$0{,}5025322 - 1$$
$$\text{num.} = 0{,}31807,$$

es ist also

$$1{,}31807 = 1{,}04^n$$
$$n = \frac{\log\ 1{,}31807}{\log\ 1{,}04} = \frac{0{,}1199385}{0{,}0170333}$$
$$= 7{,}0.$$

Das Einlage-Capital ist demnach nach 7 Jahren durch gezogene Pensionen absorbirt *).

§. 15.

Berechnung des Zinsfusses.

26. Beispiel.

Wenn man bei der Lebensversicherungs-Bank zu Lübeck für ein Kind von dessen Geburt an alljährlich pränumerando eine Prämie von 3 *Thlr.* 20 *Sgr. zahlt, so wird dem Kinde von der Bank im* 18. *Lebensjahre eine Aussteuer von* 100 *Thaler ausgezahlt. Wenn nun ein Kind dieses Alter erreicht, wie hoch haben sich dann die gezahlten Prämien verzinst?*

Es ist hier $S = 100$, $C = 2$ Thlr. 20 Sgr. $= \frac{8}{3}$ Thlr., $n = 18$ und e ist gesucht, also ist

$$100 = \frac{8}{3} \cdot \frac{e(e^{18}-1)}{e-1} \text{ ".}$$

Eine direkte Lösung würde nur durch Auflösung einer Gleichung von 18 Grade möglich sein, wir wählen deshalb den Weg des Probirens. Wir gehen hierbei von der Betrachtung aus, dass je höher der Zinsfuss angenommen wird, desto höher auch die Leistung durch gezahlte Prämien steigt, da ja die Zinsen mit geleistet werden. Es ist nun derjenige Zinsfuss zu suchen, für welchen diese Leistung den Betrag

---

*) Es versteht sich von selbst, dass der Versicherte zu dieser Zeit doch noch mehr geleistet, als genossen hat, indem ja der Gesellschaft von dessen Einlage-Capitale noch die Zinsen von 24 Jahren zu Gute gekommen sind.

100 Thlr. erreicht. Es wird uns hierbei die Tafel III. hülfreiche Dienste leisten. Diese enthält nämlich für verschiedene Procentsätze die Werthe des Ausdrucks

$$\frac{e(e^n-1)}{e-1}$$

von $n = 1$ bis $n = 100$. Aus unserer Gleichung erhalten wir nun, wenn wir beiderseits durch $\frac{s}{3}$ dividiren

$$37{,}5 = \frac{e\,(e^{18}-1)}{e-1}\ .$$

Suchen wir nun die Zahl 37,5 in der zu 18 Jahren gehörigen Querspalte, so überzeugen wir uns, dass selbst bei 7 %, dem höchsten Procentsatze, für welchen die Tafel berechnet ist, dieser Betrag noch nicht erreicht wird, indem

$$\frac{1{,}07\,(1{,}07^{18}-1)}{0{,}07} = 36{,}378965$$

ist. Es bleibt uns deshalb nichts übrig, als die Procente noch etwas zu erhöhen und dadurch dem Werthe 37,5 näher zu kommen. Nehmen wir $7\frac{1}{4}$ % an, so haben wir

$$S = \frac{1{,}0725\,(1{,}0725^{18}-1)}{0{,}0725} = \frac{10725\,(1{,}0725^{18}-1)}{725}\ .$$

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}0725 &= 0{,}0303973 \\ \log 1{,}0725^{18} &= 0{,}5471514 \\ 1{,}0725^{18} &= 3{,}52494, \end{aligned} \quad (18$$

$$\text{mithin}\quad S = \frac{10725\ .\ 2{,}52494}{725}$$

$$\begin{aligned} \log\ 10725 &= 4{,}0303973 \\ \log 2{,}52494 &= 0{,}4022442 \\ &\qquad\quad 69 \\ \hline & 4{,}4326484 \\ \log\ 725 &= 2{,}8603380 \\ \hline \log\ S &= 1{,}5723104 \\ S &= 37{,}35. \end{aligned}$$

Dieser Werth stimmt mit dem früheren 37,5 bis auf $\frac{3}{20}$ Thlr. oder $4\frac{1}{2}$ Sgr. überein. Die gezahlten Prämien verinteressiren sich also noch ein wenig höher als zu $7\frac{1}{4}$ %.

27. Beispiel.

Wird für ein Kind beim Janus in Hamburg alljährlich pränumerando vom 2. *Jahre ab* 3 *Thlr.* 10 *Sgr. Prämie gezahlt, so erhält das Kind nach erreichtem* 21. *Lebensjahre ein Kapital von* 100 *Thlr. ausgezahlt. Wie hoch würden sich nach dieser Zeit die Einlagen verzinst haben?*

Es ist hier $S = 100$, $C = 3$ Thlr. 10 Sgr. $= \frac{10}{3}$ Thlr., $n = 19$ und e ist gesucht, wir haben also

$$100 = \frac{10}{3} \cdot \frac{e(e^{19}-1)}{e-1}$$

$$\text{oder } 30 = \frac{e(e^{19}-1)}{e-1} \cdot$$

Suchen wir die Zahl 30 in der zu 19 Jahren gehörigen Querspalte der Tafel III., so finden wir bei $4\frac{1}{2}$ % den Betrag 30,371423; so dass sich also die Prämien nahe zu $4\frac{1}{2}$ % verzinsen. Nehmen wir zu genauerer Bestimmung des Zinsfusses etwa $4\frac{7}{16}$ % an, so haben wir $e = 1{,}044375$, also

$$S = \frac{1{,}044375\ (1{,}044375^{19}-1)}{0{,}044375} \cdot$$

$$\log\ 1{,}044375 = 0{,}0188565$$
$$\log 1{,}044375^{19} = 0{,}3582735 \quad (19$$
$$1{,}044375^{19} = 2{,}281778,$$

$$\text{also } S = \frac{1044375 \cdot 1{,}281778}{44375} \cdot$$

$$\log\ 1044375 = 6{,}0188565$$
$$\log\ 1{,}281777 = 0{,}1077864$$
$$237$$
$$27$$
$$\overline{6{,}1266693}$$
$$\log\ 44375 = 4{,}6471384$$
$$\overline{\log\ S = 1{,}4795309}$$
$$S = 30{,}167.$$

Die Prämien verzinsen sich mithin fast genau zu $4\frac{7}{16}$ %.

28. Beispiel.

Die Medical, Invalid and General Life Assurance Society in London (Verwaltung für Deutschland in Frankfurt am Main) hat eine Aussteuerversicherung, bei welcher die Prämien zurückgezahlt werden, wenn das Kind die Versicherungszeit nicht erlebt. Man kann daselbst einem Kinde im Alter von 1 *Jahre ein Capital von* 100, *zahlbar nach erreichtem* 21. *Lebensjahre durch eine jährliche Prämie von* 3 *Thaler* 16 *Sgr.* 8 *Pf. sichern. Wie hoch verzinsen sich hier die jährlichen Einlagen, wenn das Kind jenes Alter erreicht?*

Es ist hier $S = 100$, $C = 3$ Thlr. 16 Sgr. 8 Sgr. $= \frac{32}{9}$ Thlr., $n = 20$, mithin

$$100 = \frac{32}{9} \cdot \frac{e(e^{20}-1)}{e-1}$$

$$\text{oder } \frac{900}{32} = 28{,}125 = \frac{e(e^{20}-1}{e-1} .$$

Suchen wir die Zahl 28,125 in der zu 20 Jahren gehörigen Querspalte der Tafel III., so finden wir bei $3\frac{1}{4}$ % den Betrag 28,460082 . . Die jährlichen Einlagen verzinsen sich demnach nahe zu $3\frac{1}{4}$ %.

29. Beispiel.

Bei der im Jahre 1849 *gegründeten „Deutschen Betrieb-Capitals- und Aussteueranstalt für den Handels- und Handwerkerstand“ zu Berlin hat man, um einem Kinde, welches* 2 *Jahre alt ist, bei erreichtem* 24. *Lebensjahre ein Kapital von* 100 *Thlr. zu sichern, monatlich* 6 *Sgr.* 3 *Pf. oder vierteljährlich* 18 *Sgr.* 9 *Pf. zu zahlen. Wie hoch würden sich diese Einlagen verinteressiren, wenn das Kind jenes Alter erreichte?*

Nehmen wir an die Prämien würden jährlich pränumerando gezahlt, so dass also die Prämie $2\frac{1}{2}$ Thlr. betrüge, so haben wir $S = 100$, $C = \frac{5}{2}$ Thlr., $n = 22$, also

$$100 = \frac{5}{2} \cdot \frac{e\,(e^{22}-1)}{e-1}$$

$$\text{oder } 40 = \frac{e\,(e^{22}-1)}{e-1} .$$

In Taf. III. finden wir sehr nahe e = 1,05. Die Prämien verinteressirten sich also ungefähr zu 5 %.

30. Beispiel.

Bei derselben Anstalt ist vom 20. *Lebensjahre ab vierteljährlich* 4 *Thlr.* 10 *Sgr. für die gleiche Versicherung zu zahlen. Wie viel Procente würden hier die Prämien bei der vorigen Voraussetzung tragen?*

Nehmen wir jährliche Prämienzahlung im Betrage von 17 Thlr. 10 Sgr. an, so haben wir

$$S = 100, \quad C = \frac{52}{3}, \quad n = 4,$$

$$\text{also} \quad 100 = \frac{52}{3} \cdot \frac{e\,(^4\!-\!1)}{e-1} \quad \text{oder nahe}$$

$$5{,}77 = \frac{e\,(e^4-1)}{e-1}.$$

Da nach Taf. III. der Betrag bei 7 % erst 4,750.. ausmacht, so ist der Zinsfuss noch weit über 7 %. Um ihn genauer zu ermitteln und doch die Tafeln benutzen zu können, gehen wir auf die vierteljährlichen Zahlungen zurück. Rechnen wir statt 4 Jahren 16 Vierteljahre, so haben wir

$$S = 100, \quad C = \frac{13}{3}, \quad n = 16,$$

$$\text{also} \quad 100 = \frac{13}{3} \cdot \frac{e\,(e^{16}-1)}{e-1}$$

$$\text{oder} \quad 23{,}08 = \frac{e\,(e^{16}-1)}{e-1},$$

wo sich e auf die Zinsen für ein Vierteljahr bezieht.

In Tafel III. finden wir in der 16. Querspalte 22,7 c. bei 4 % und 23,7 c. bei $4\frac{1}{2}$ %. Nach ungefährer Schätzung tragen also die Prämien vierteljährlich etwa $4\frac{1}{8}$ %, also jährlich $16\frac{1}{2}$ % *).

---

*) Das von der Anstalt am 1. Juni 1849 ausgegebene Programm muss schlechterdings falsch sein, denn bei $16\frac{1}{2}$ % müsste das Institut binnen Kurzem zu Grunde gehen. Wahrscheinlich soll der Passus „wenn das Mit-

Zum Schlusse geben wir auch hier noch ein direkt gelöstes Beispiel.

31. Beispiel.

Eine Summe von 9900 *Thlr., die Jemand nach* 3 *Jahren zu zahlen hat, will derselbe durch Raten à* 3000 *Thlr., die drei Jahre hinter einander zu Anfange eines jeden zahlbar sind, decken. Wie hohe Procente rechnet er?*

Es ist hier $S = 9900$, $C = 3000$, $n = 3$, also

$$9900 = 3000 \cdot \frac{e(e^3-1)}{e-1}$$

oder $$3{,}3 = \frac{e(e^3-1)}{e-1} = e(e^2+e+1) = e^3+e^2+e,$$

also ist $e^3 + e^2 + e - 3{,}3 = 0$ die zu lösende Gleichung. Setzen wir in dieselbe $y - \frac{1}{3} = e$ ein, so erhalten wir

$$y^3 + \frac{2}{3}\,y - \frac{961}{270} = 0.$$

Befolgen wir dasselbe Verfahren, wie beim 17. Beispiele, so haben wir zunächst den Winkel φ aus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5400\sqrt{2}}{4805}$$

zu berechnen. Es ist

---

glied bei seiner Aufnahme alt ist: 2 Jahre u. s. f." heissen, „wenn das Mitglied bei seiner Aufnahme das 2te Jahr angetreten hat", wo also vorausgesetzt wird, dass für das angetretene Jahr noch Prämien mitbezahlt werden müssen. Nehmen wir dies an, so hätten wir die Formel

$$23{,}08 = \frac{e(e^{20}-1)}{e-1},$$

weil 4 Vierteljahre länger Prämien gezahlt werden. Suchen wir die Zahl 23,08 in der 20. Querspalte der Tafel III., so finden wir 22,239 . . bei 1 % und 24,78.. bei 2 %, die vierteljährlichen Zinsen würden also ungefähr $1\frac{1}{2}$ %, also die jährlichen 6 % betragen. Jedoch auch bei diesem Zinsfusse dürfte die Anstalt ohne Einforderung von Nachschüssen wohl schwerlich auskommen.

$$\log 5400 = 3{,}7323938$$
$$\log \sqrt{2} = 0{,}1505150$$
$$3{,}8829088$$
$$\log 4805 = 3{,}6816934$$
$$\log 27 = 1{,}4313638$$
$$5{,}1130572 \quad \text{subtrahirt}$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 8{,}7698516 - 10.$$
$$\varphi = 3^0\ 22'\ 7{,}''6.$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi = 1^0\ 41'\ 3{,}''8.$$
$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[5]{\operatorname{tg} 1^0\ 41'\ 3{,}''8}.$$
$$\log \operatorname{tg} 1^0\ 41'\ 3{,}''8 = 8{,}4684448 - 10$$
$$= 28{,}4684448 - 30$$
$$\log \operatorname{tg}\psi = \log \sqrt[5]{\operatorname{tg} 1^0 41' 3{,}''8} = 9{,}4894816 - 10 \quad (3$$
$$\psi = 17^0\ 9'\ 12{,}''3.$$
$$2\ \psi = 34^0\ 18'\ 24{,}''6,$$
$$y = \frac{2\sqrt{2}\ \text{cot.}\ 34^0\ 18'\ 24{,}''6}{3}.$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \sqrt{2} = 0{,}1505150$$
$$\log \operatorname{cot} 2\psi = 10{,}1660065 - 10$$
$$0{,}6175515$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log y = 0{,}1404302$$
$$y = 1{,}3816,$$
$$e = 1{,}38316 - 0{,}33333 = 1{,}04983.$$

Die Theilzahlungen würden sich also nahe zu 5 % verinteressiren.

Viertes Kapitel.

Renten-Rechnung bei Zahlung der Mise in einer Summe.

§. 16.

Allgemeine Bemerkungen.

Eine in festgesetzten gleichen Terminen während eines bestimmten Zeitraums zahlbare Geldeinnahme, die man sich durch Erlegung eines gewissen Capitals oder durch Ueberlassung eines anderen Besitzthums erwirbt, wird eine Rente genannt, während das, wofür letztere erworben wird, die Mise heisst.

Die auf eine bestimmte Zeit abgeschlossenen Renten heissen Zeitrenten, die auf die ganze Lebensdauer des Rentenempfängers (Rentenirers) abgeschlossenen hingegen Leibrenten.

Man unterscheidet ferner Jahrrenten, Halbjahrrenten, Vierteljahrrenten, Monatrenten u. s. w., je nachdem die Rente alle Jahre, alle Halbjahre u. s. w. aus gezahlt wird.

Erfolgt die Zahlung der Rente zu Anfange des festgesetzten Termins, so heisst sie eine vorschussweise, erfolgt sie am Ende, eine nachschussweise.

I. Sofort beginnende nachschussweise Zeitrenten ohne Rücksicht auf Sterblichkeit.

§. 17.

Theorie dieser Rechnungsart.

A. Wir stellen uns die Aufgabe: welches ist der gegenwärtige Werth (W) einer n Jahre hinter einander zu zahlenden nachschussweisen Rente (R), wenn p % Zinsen gerechnet werden.

Bezeichnen wir wieder den Ausdruck $\frac{p+100}{100}$ mit e, so ist nach §. 1. die Summe W in n Jahren angewachsen zu

$$W \,.\, e^n.$$

Eine am Ende jedes Jahres n Jahre hinter einander gezahlte Summe R wächst aber nach §. 6. an zu

$$R \,.\, \frac{e^n-1}{e-1} \,.$$

Der erste Ausdruck bezeichnet nun die Leistung des Rentenkäufers, der zweite die des Rentenzahlers, folglich haben wir, da die Leistungen gleich sein müssen

$$W \,.\, e^n = R \,.\, \frac{e^n-1}{e-1} \quad \ldots \quad (37)$$

$$\text{mithin} \quad W = R \,.\, \frac{e^n-1}{(e-1)\,e^n} \quad \ldots \quad (38).$$

B. Wird nach der Rente (R) gefragt, welche für eine bestimmte eingezahlte Summe (W) bei p % Zinsen n Jahre hinter einander gezahlt werden kann, so ergiebt die Formel (38)

$$R = W \,.\, \frac{e^n(e-1)}{e^n-1} \quad \ldots \quad (38).$$

C. Soll gegen eine Summe W die Rente R bei p % Zinsen alljährlich gezahlt werden und es wird gefragt, wie viele (n) Jahre dies geschehen kann, so haben wir aus (37)

$$W e^n(e-1) = R e^n - R$$

$$\text{oder} \quad R = R e^n - W e^n\,(e-1)$$

$$= [R - W(e-1)]\, e^n$$

$$\text{oder} \quad e^n = \frac{R}{R - W(e-1)} \,.$$

Nehmen wir beiderseits die Logarithmen, so erhalten wir

$$n \log e = \log R - \log [R - W(e-1)]$$

$$\text{also} \quad n = \frac{\log R - \log [R - W(e-1)]}{\log e} \quad \ldots \quad (39).$$

D. Wird Jemanden gegen die sofort zu erlegende Summe W die Rente R auf n Jahre zugesichert, und es wird gefragt, was für ein Zinsfuss ($p\,\%$) hierbei angenommen worden ist, so ergiebt sich aus (37)

$$We^n = R(e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} + .. + e^3 + e^2 + e + 1) \ldots (40).$$

Die Aufgabe führt also auf eine Gleichung vom $n$ten Grade. Man bedient sich auch hier statt der direkten Lösung der Lösung durch Probiren, wovon später weiter die Rede sein wird.

§. 18.

Berechnung des gegenwärtigen Werthes.

31. Beispiel.

Welchen Werth hat eine nachschussweise Rente im Betrage von 215 *Thlr., welche* 25 *Jahre hinter einander gezahlt wird, wenn* $3\frac{1}{2}$ *% Zinsen gerechnet werden?*

Wir rechnen hier nach der Formel (38) und haben $R = 215$, $n = 25$, $e = 1{,}035$ in dieselbe einzusetzen, wodurch wir erhalten

$$W = \frac{215 . (1{,}035^{25} - 1)}{0{,}035 . 1{,}035^{25}} .$$

In Tafel IV. sind die gegenwärtigen Werthe der 1 bis 100 Jahre hinter einander zu zahlenden Rente von 1 Thlr. berechnet. Bezeichnen wir in unserem Beispiele den gegenwärtigen Werth der Rente von 1 Thlr. mit w, so ist

$$w = \frac{1{,}035^{25} - 1}{0{,}035 . 1{,}035^{25}} .$$

Diesen Werth finden wir in der erwähnten Tafel, indem wir in der ersten Spalte herab bis zur Zahl 25 und von dieser horizontal bis zu der mit $3\frac{1}{2}$ % überschriebenen Spalte gehen. Die Zahl, die wir da finden, ist

$$w = 16{,}4815146.$$

Nun ist

$$W = 215 \cdot w$$

oder wenn wir die Multiplication ausführen

$$W = 3543{,}5256 \text{ Thlr.}$$

32. Beispiel.

Jemand übernimmt ein Haus mit der Verpflichtung dem bisherigen Besitzer 15 *Jahre hinter einander eine nachschussweise Rente von* 200 *Thlrn. auszuzahlen. Wie hoch wurde das Haus taxirt, wenn* 4 % *Zinsen gerechnet werden?*

Wir finden in Tafel IV. als die zu 15 Jahren und 4% gehörige Zahl

$$11{,}1183874.$$

Multipliciren wir diese mit 200, so erhalten wir

$$W = 2223{,}67758 \text{ Thlr.}$$

33. Beispiel.

Eine Stadt will in einer Bank ein Darlehn aufnehmen mit der Verpflichtung, dasselbe durch eine am Ende jedes Jahres zahlbare Summe von 800 *Thlrn. binnen* 30 *Jahren zu decken. Welche Summe kann die Bank der Stadt vorstrecken, wenn zu* $4\frac{1}{2}$ % *negoziirt worden ist?*

Die zu 30 Jahren und $4\frac{1}{2}$ % gehörige Zahl der Taf. IV. ist

$$16{,}2888885.$$

Multipliciren wir diese mit 800, so erhalten wir

$$W = 13031 \text{ Thlr.}$$

§. 18.

Berechnung der Rente oder jährliche Zahlung.

Wird nach dem Betrage der Rente (R) gefragt, welche gegen Erlegung einer bestimmten Summe (W) bei p % Zinsen n Jahre hinter einander postnumerando gezahlt werden kann, so findet die Formel (38)

$$R = W \cdot \frac{e^n (e-1)}{e^n - 1}$$

Anwendung. Statt W mit $\frac{e^n (e-1)}{e^n - 1}$ zu multipliciren,

können wir auch W mit dem umgekehrten Werthe des zweiten Ausdrucks, also mit

$$\frac{e^n - 1}{e^n (e - 1}$$

dividiren und es kann also, da letzterer Ausdruck mit Hülfe der Tafel IV. gefunden wird, die Berechnung ebenfalls mit Benutzung genannter Tafel geführt werden, indem der gegebene Werth W durch die in der Tafel gefundene Zahl dividirt wird.

34. Beispiel.

Dem Vormunde eines Kindes von 5 *Jahren wird eine Summe von* 5000 *Thlr. überwiesen mit der Verpflichtung, genanntes Kind bis zu seiner Grossjährigkeit zu erziehen. Welches ist der Betrag des postnumerando zahlbar angenommenen jährlichen Erziehungsgeldes, wenn* 5 % *Zinsen berechnet werden?*

Da das Kind im 24. Jahre majorenn wird, so ist dasselbe 19 Jahre lang zu erziehen, wir haben also $n = 19$, $p = 5$ und $W = 5000$. Die zu 19 Jahren und 5 % gehörige Zahl in Taf. IV. ist

12,0853209.

Dividiren wir mit derselben in 5000, so erhalten wir

R = 413, 7 . . Thlr.

35. Beispiel.

Ein Staat macht eine Anleihe von 7 *Millionen Thaler unter der Bedingung, diese Summe innerhalb* 40 *Jahren durch eine jährlich postnumerando zu zahlende Summe zu decken. Wie hoch ist der Betrag der letzteren, wenn* $4\frac{1}{2}$ % *Zinsen berechnet werden?*

Es ist hier $W = 7000000$, $n = 40$, $p = 4\frac{1}{2}$. Da die in Tafel IV. zu 40 Jahren und $4\frac{1}{2}$ % gehörige Zahl

18,4015844

ist, so haben wir

$$R = \frac{7000000}{18{,}4015844} \text{ Thlr.} = 380402 \text{ Thlr. } — \text{ Sgr. } 10 \text{ Pf.}$$

36. Beispiel.

Welche nachschussweise Vierteljahrrente (R) kann für die Summe 5758 *Thlr. während* 20 *Jahren zahlbar bei* 4 % *Zinsen gewährt werden?*

Da die Rente vierteljährlich bezahlt werden soll, so sind auch die vierteljährlichen Zinsen (1 %) in Betracht zu ziehen, wir haben deshalb in Formel (38) die Werthe $W = 5758$, $e = 1{,}01$, $n = 80$ einzusetzen. Die zu $n = 80$ und 1% gehörige Zahl in Tafel IV. ist

54,8882061.

Dividiren wir damit in 5758, so erhalten wir

$$R = \frac{5758}{54{,}8882061} \text{ Thlr.} = 104 \text{ Thlr. } 27 \text{ Sgr.}$$

§. 19.

Berechnung der Jahre.

Auf wie viele Jahre kann Jemandem eine nachschussweise Jahrrente im Betrage von 250 *Thlr. bei Einzahlung einer Summe von* 3750 *gewährt werden, wenn* $3\frac{1}{2}$ % *Zinsen berechnet werden?*

Wir haben hier $W = 3750$, $R = 250$, $e = 1{,}035$ und n ist gesucht, wir rechnen deshalb nach Formel (39)

$$n = \frac{\log 2 - \log(R - W(e-1)}{\log e}.$$

Setzen wir unsere Werthe in dieselbe ein, so bekommen wir

$$n = \frac{\log 250 - \log(250 - 3750 \,.\, 0{,}035)}{\log 1{,}035}$$

$$= \frac{\log 250 - \log(250 - 131{,}25)}{\log 1{,}035}$$

$$= \frac{\log 250 - \log 188{,}75}{\log 1{,}035}.$$

$\log 250 = 2{,}3979400$
$\log 118{,}75 = 2{,}0746336$ } subtrahirt

$0{,}3233064.$

$\log 1{,}035 = 0{,}0149403.$

Es ist also

$$n = \frac{0{,}3233064}{0{,}0149403} = \frac{3233064}{149403}$$

$$= 21,\ 6.$$

Die besagte Rente kann demnach 21 Jahre hinter einander gewährt werden.

37. Beispiel.

Eine Aktiengesellschaft bringt zum Aufbau und zur Einrichtung einer Zuckersiederei eine Summe von 75000 *Thlr. auf. Nach wie viel Jahren beginnt der eigentliche Nutzen für die Theilhaber, wenn die Fabrik im Durchschnitt einen Reinertrag von* 8560 *Thlr. gewährt und die aufgewendeten Gelder sonst mit* 5 $^0/_0$ *ausgeliehen werden könnten?*

Es ist hier $W = 75000$, $R = 8560$, $e = 1{,}05$ und n ist gesucht. Setzen wir die Werthe in (39) ein, so erhalten wir

$$n = \frac{\log 8560 - \log (8560 - 75000 \,.\, 0{,}05)}{\log 1{,}05}$$

$$= \frac{\log 8560 - \log 4810}{\log 1{,}05} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \log\ 8560 = 3{,}9324738 \\ \log\ 1810 = 3{,}6821451 \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$0{,}2503287$$

$$\log\ 1{,}05 = 0{,}0211893.$$

Es ist also

$$n = \frac{0{,}2503287}{0{,}0211893} = \frac{2503287}{211893}$$

$$= 11{,}3\ \ldots$$

Der eigentliche Nutzen erfolgt erst im 12ten Jahre.

Auch die beiden letzten Aufgaben lassen sich mit Hülfe der Taf. IV. lösen.

Gehen wir nämlich auf die Formel (39) zurück, so ergiebt sich aus derselben

$$\frac{W}{R} = \frac{e^n - 1}{(e-1)\,e^n},$$

oder wenn wir die Werthe aus dem 36. Beispiele einsetzen:

$$\frac{3750}{250} = \frac{1{,}035^n - 1}{0{,}035 \,.\, 1{,}035^n} \,. = 15.$$

Es enthält Tafel IV. die Werthe für den Ausdruck

$$\frac{e^n - 1}{(e-1)\,e^n}$$

für verschiedene Procentsätze von 1 — 100 Jahren. Suchen wir deshalb in der zu $3\frac{1}{2}$ % gehörigen Spalte die zu dem Zahlenwerthe 15 gehörigen Jahre, so finden wir

bei 21 Jahren - - 14,697 . . .
und bei 22 Jahren - - 15,167 . . .

Der Werth von n liegt also zwischen 21 und 22.

Wenden wir dasselbe Verfahren auf das 37. Beispiel an, so haben wir

$$\frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^n} = \frac{75000}{8560} = 8{,}74.$$

Suchen wir die Zahl 8,74 in der zu 5 % gehörigen Spalte, so finden wir

bei 11 Jahren 8,306 . .
und bei 12 Jahren 8,863 . . ,

Der Werth von n liegt also zwischen 11 und 12.

§. 13.

Berechnung der Procente.

Es wurde bereits bemerkt, dass die Berechnung der Procente auf direktem Wege immer die Lösung einer algebraischen Gleichung erfordere, deren Grad bestimmt wird durch die Anzahl der Jahre, während welcher die Rente bezahlt wird; gleichzeitig wurde aber auch darauf hingewiesen, dass man statt dieser direkten Lösung mit mehr Vortheil den Weg des Probirens wähle. Es ist nämlich nach Formel (38)

$$\frac{W}{R} = \frac{e^n - 1}{(e-1)e^n}$$

und es enthält die Tafel IV. die Werthe des Ausdrucks

$$\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n}$$

für $e = 1{,}01$ bis $e = 1{,}07$ und für $n = 1$ bis 100, mithin hat man folgende Regel:

Man dividire mit der gegebenen Rente (R) in ihren ursprünglichen Werth (W) und suche die dadurch erhaltene Zahl in der zu den gegebenen (n) Jahren gehörigen Querspalte auf. Fände sie sich gerade vollständig auf, so wären die darüber stehenden Procente die gesuchten. Steht die vorerwähnte Zahl aber nicht in dieser Querspalte, was in der Regel der Fall sein wird, sondern fällt zwischen zwei dort befindliche Zahlen, so fallen auch die gesuchten Procente zwischen die zu den einschliessenden Zahlenwerthen gehörigen Procente.

Was zu der noch genaueren Bestimmung der Procente erforderlich ist und was zu thun ist, wenn sich auch ein Paar einschliessende Zahlenwerthe gar nicht finden, wird aus den nachfolgenden Beispielen deutlich werden.

38. Beispiel.

Ein Staat nimmt ein Darlehn von 18000000 *Thlr. auf unter der Bedingung, diese Schuld binnen* 30 *Jahren durch eine alljährlich postnumerando zu zahlende Summe von* 1125000 *Thalern ohne weitere Zinsenzahlung zu decken. Zu welchem Zinsfusse ist hierbei negoziirt worden?*

Es ist hier $W = 18000000$ und $R = 1125000$, mithin

$$\frac{W}{R} = \frac{18000000}{1125000} = 16.$$

Suchen wir diese Zahl in Tafel IV. in der zu $n = 30$ gehörigen Querspalte, so finden wir die einschliessenden Zahlenwerthe

16,28 . . und 15,37 . .

bezüglich gehörig zu $4\frac{1}{2}$ und 5 %. Der Zinsfuss ist also etwas über $4\frac{1}{2}$ %. Um denselben genauer zu bestimmen, nehmen wir $p = 4\frac{3}{4}$, oder $e = 1{,}0475$ und berechnen dafür den Ausdruck

$$\frac{e^n - 1}{(e-1)\,e^n} = \frac{1{,}0475^{30} - 1}{0{,}0475 \,.\, 1{,}0475^{30}}.$$

$$\log 1{,}0475 = 0{,}0201540$$
$$30 \log 1{,}0475 = 0{,}6046200 \quad (30$$
$$1{,}0475^{30} = 4{,}02365,$$

mithin

$$\frac{e^n-1}{(e-1)e^n} = \frac{3{,}02365}{0{,}0475\,.\,1{,}0475^{30}}.$$

$$\begin{aligned} \log\ 3{,}02365 &= 0{,}4805315 \\ \log\ 0{,}0475 &= 0{,}6766936-2 \\ \log\ 1{,}0475^{30} &= 0{,}6046200 \end{aligned}$$ addirt

$$0{,}2813136 - 1.$$

Dies von 0,4805315 subtrahirt giebt

1,1992179.

Suchen wir die hierzu gehörige Zahl, so finden wir

$$\frac{e^n-1}{(e-1)e^n} = 15{,}82\ldots$$

Es geht hieraus hervor, dass noch nicht ganz $4\frac{3}{4}\,\%$ angenommen sind. Nehmen wir zur genaueren Bestimmung $4\frac{5}{8}\,\%$ an, d. h. also setzen wir

$$e = 1{,}04625$$

so haben wir

$$\frac{e^n-1}{(e-1)e^n} = \frac{1{,}04625^{30}-1}{0{,}04625\,.\,1{,}04625^{30}}$$

zu berechnen.

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}04625 &= 0{,}0196355 \\ 30\log\ 1{,}04625 &= 0{,}5890650 \\ 1{,}04625^{30} &= 3{,}88208, \end{aligned}$$ (30

mithin

$$\frac{e^n-1}{(e-1)e^n} = \frac{2{,}88208}{0{,}04625\,.\,1{,}04625^{30}}.$$

$$\begin{aligned} \log\ 2{,}88208 &= 0{,}4597060 \\ \log\ 0{,}04625 &= 0{,}6651117 - 2 \\ \log\ 1{,}04625^{30} &= 0{,}5890650 \end{aligned}$$ addirt

$$0{,}2541767 - 1.$$

Dies von 0,4597060 subtrahirt giebt

1,2055293.

Die hierzu gehörige Zahl ist

16,052.

Es geht hieraus hervor, dass fast ganz genau zu $4\frac{5}{8}$ Procent negoziirt worden ist.

39. Beispiel.

Jemand, der sich in seinem 54. *Jahre bei der Medical, Invalid and General Life Assurance Society in London für* 3000 *Thlr. eine jährliche Rente im Betrage von* 241 *Thlr. gekauft hat, stirbt im erreichten* 77. *Lebensjahre. Wie hoch hat sich sein Geld verinteressirt?*

Es ist $W = 3000$, $R = 241$ und $n = 23$. Wir haben somit, nach Einsetzung dieser Werthe in die Pormel

$$\frac{W}{R} = \frac{e^n - 1}{(e-1)\,e^n},$$

$$12{,}448 = \frac{e^{23} - 1}{(e-1)\,e^{23}}.$$

Suchen wir in Tafel IV. die Zahl 12,448 in der zu $n = 23$ gehörigen Querspalte, so finden wir in der zu 6% gehörigen Columne die Zahl 12,303. Es geht hieraus hervor, dass das Einlage-Capital des Rentenirers sich beinahe zu 6% verzinst hat. —

II. Späler beginnende nachschussweise Zeitrenten.

§. 21.

Theorie dieser Rechnungsart.

Beginnt die Zahlung der Rente *(R)* erst einige *(m)* Jahre nach der Einzahlung ihrer Kaufsumme *(W)*, so ist *W* vor Beginn des Rentengenusses angewachsen zu

$$W \,.\, e^m.$$

Wird nun die Rente *n* Jahre bezogen, so geniesst die Rentenbank die Zinsen der Kaufsumme noch anderweite *n* Jahre und es beträgt also die vollständige Leistung des Rentenkäufers

$$We^m \,.\, e^n \text{ oder } W \,.\, e^{m+n} = A.$$

Dafür geniesst derselbe *n* Jahre hinter einander die Rente *R* also in Summa

$$R \,.\, \frac{e^n - 1}{e - 1} = B.$$

Wir erhalten demnach als Grundformel dieser Rechnung, weil $A = B$ sein muss,

$$We^m . e^n = W . e^{m+n} = R . \frac{e^n - 1}{e - 1} \quad \ldots \quad (41).$$

§. 22.

Berechnung des gegenwärtigen Werthes.

Wir erhalten aus Formel (41)

$$W = \frac{R(e^n - 1)}{(e-1)\,e^n . e^m} \quad \ldots \quad (42).$$

Von diesem Ausdrucke kann der Werth von

$$\frac{e^n - 1}{(e-1)\,e^n} = w$$

mittelst der Tafel IV., wenn die gegebenen Procente darin enthalten sind, gefunden werden, folglich bleibt

$$W = \frac{R . w}{e^m} \quad \ldots \quad (43)$$

zu berechnen, wo wieder e^m aus Tafel I. gefunden werden kann. —

Ist hingegen W für Procente zu berechnen, die in den Tafeln nicht stehen, so bleibt nichts übrig als aus der Formel

$$W = \frac{R\,(e^n - 1)}{(e-1)\,e^{m+n}} \quad \ldots \quad (44)$$

den Werth von W zu berechnen. Wir werden für jeden der beiden Fälle ein Beispiel berechnen.

40. Beispiel.

Wer in seinem 40. *Jahre bei der Breslauer Alterversorgungs-Gesellschaft die Summe von* 300 *Thaler einzahlt, erhält vom* 70 *Jahre an jährlich* 100 *Thlr. ausgezahlt. Gesetzt es hätte sich Jemand in dieser Weise versichert und stürbe im* 82 *Jahre, was hätte dann eigentlich die Gesellschaft bei* $3\frac{1}{2}$ % *fordern müssen?*

Es ist hier $R = 100$, $e = 1{,}035$, $m = 29$, (es wird nämlich am Ende des 69sten Jahres die erste Rente bezahlt), $n = 14$, folglich erhalten wir nach Einsetzung dieser Werthe in Formel (42)

$$W = \frac{100}{1{,}035^{29}} \cdot \frac{1{,}035^{14} - 1}{0{,}035 \,.\, 1{,}035^{14}} \,.$$

Der zweite Faktor ist nach Taf. IV.

$$w = 10{,}9205203.$$

Setzen wir diesen Werth in (33) ein, so erhalten

$$W = \frac{100 \,.\, 10{,}9205203}{1{,}035^{29}} \,.$$

Nach Taf. I. ist $1{,}035^{29} = 2{,}711878$,

folglich

$$W = \frac{1092{,}5203}{2{,}711878} = 402{,}8 \ldots \text{Thlr.}$$

Der Werth der gezogenen Renten hätte also in 40 Jahren eigentlich 402,8 Thlr. betragen.

41. Beispiel.

Jemand hat als Eigenthümer vom Grund und Boden einen Grundkux an einem gewerkschaftlichen Bergbau. Wenn der Ertrag erst nach 7 Jahren beginnt und jeder Kuxinhaber nur während 20 Jahren einen jährlichen Nettogewinn von 1250 Thlr. geniesst, weil nach dieser Zeit das Bergwerk an den Staat übergeht, so fragt es sich, wie theuer ist dem Grundbesitzer sein Grundstück bezahlt worden, wenn 5 % Zinsen berechnet werden?

Es ist hier $R = 1250$, $e = 1{,}05$, $m = 7$, $n = 20$ und W ist gesucht, wir erhalten also nach Formel (42)

$$W = \frac{1250}{1{,}05^{7}} \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^{20}}$$

Der zweite Faktor ist nach Tafel IV.

$$w = 12{,}4622103$$

nach Tafel I. ist

$$1{,}05^{7} = 1{,}407100$$

folglich

$$W = \frac{1250 \,.\, 12{,}4622103}{1{,}407100} \,.$$

Berechnen wir diesen Ausdruck mit Logarithmen, so ist

$$\left.\begin{array}{rl} \log\ 1250 = & 3{,}0969100 \\ \log\ 12{,}462\ldots = & 1{,}0955950 \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$\left.\begin{array}{rl} & 4{,}1925050 \\ \log\ 1{,}4071 = & 0{,}1483250 \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$\log W = 4{,}0441800$$

$$W = 11070{,}8\ \ldots$$

Das Grundstück ist demnach mit 11070,8 ℛℳ. bezahlt worden.

§. 23.

Berechnung der Rente.

Aus Formel (41) ergiebt sich ohne Weiteres

$$R = W \cdot e^m \cdot \frac{e^n(e-1)}{e^n-1} \ldots \quad (45)$$

oder wenn wir wieder

$$\frac{e^n-1}{e^n\,(e-1)} = w$$

setzen,

$$R = \frac{We^m}{w} \ldots \quad (46).$$

Dies ist die Formel, welche der Berechnung der Rente zum Grunde liegt.

42. Beispiel.

Wer bei der Lübecker Bank in seinem 28. *Jahre die Summe von* 1200 *Thlr. einzahlt, dem wird von dessen* 39. *Jahre ab alljährlich bis zum Tode eine Rente von* 100 *Thlr. ausgezahlt. Gesetzt Jemand hätte sich unter diesen Verhältnissen versichert und stürbe nach erreichtem* 79. *Lebensjahre, wie viel würde die Bank bei dieser Versicherung alljährlich gewonnen oder verloren haben, wenn* 4 % *Zinsen berechnet werden?*

Es ist in diesem Falle $W = 1200$, $m = 11$, $n = 40$, $e = 1{,}04$, folglich

$$R = \frac{1200\,.\,1{,}04^{11}}{w}$$

und zwar

$$w = \frac{1{,}04^{40} - 1}{1{,}04^{40} \cdot 0{,}04} .$$

Um R zu berechnen, suchen wir zunächst $1{,}04^{11}$ in Tafel I., wo wir

$$1{,}04^{11} = 1{,}539454$$

finden. Es ist also

$$R = \frac{1200 \cdot 1{,}539454}{w} = \frac{1847{,}3448}{w}.$$

Den Werth von w finden wir in Taf. IV. und zwar

$$w = 19{,}7927739.$$

Wir haben somit

$$R = \frac{1847{,}3448}{19{,}7927739} = 93{,}3\ \ .$$

Die Gesellschaft hätte eigentlich unter diesen Umständen nur eine Rente von 93 Thlr. 9 Sgr. geben können, hat somit alljährlich 6 Thlr. 21 Sgr. verloren.

43. Beispiel.

Bei der vorerwähnten Bank hat Jemand im 47. *Lebensjahre* 501 *Thlr. einzuzahlen, wenn er vom* 63. *Jahre ab* 100 *Thlr. Rente geniessen will. Wie würde sich hier bei* 4% *Zinsen der jährliche Gewinn oder Verlust der Bank stellen, wenn der Rentenkäufer nach erreichtem* 79*sten Lebensjahre stürbe?*

Es ist hier $W = 501$, $m = 16$, $n = 16$, $e = 1{,}04$, also

$$R = \frac{501 \cdot 1{,}04^{16}}{w}$$

$$\text{und } w = \frac{1{,}04^{16} - 1}{1{,}04^{16} \cdot 0{,}04} .$$

Tach Tafel I. ist

$$1{,}04^{16} = 1{,}872981,$$

$$\text{folglich } R = \frac{501 \cdot 1{,}872981}{w} = \frac{938{,}363481}{w} .$$

Nach Tafel IV. ist

$$w = 11{,}6522956,$$

also

$$R = \frac{938{,}363481}{11{,}6522956}$$

$$= 80{,}5 \ldots$$

Es würde also auch in diesem Falle ein Verlust für die Gesellschaft erwachsen, weil die gezahlte Summe nur einer Rente von 80 Thlr. 15 Sgr. entspricht. Der jährliche Verlust betrüge demnach 21 Thlr. 15 Sgr.

§. 24.

Berechnung der Jahre, während welcher die Rente gezahlt wird.

Wird gefragt, auf wie viel Jahre eine Rente R, welche m Jahre vor dem Beginn derselben für die Summe W gekauft worden ist, bei festgesetztem Zinsfusse gewährt werden kann; so ist aus den Grössen W, R, m und e der Werth von n zu bestimmen.

Aus Formel (41) erhalten wir sofort

$$We^m \cdot e^n (e-1) = Re^n - R$$

oder

$$R = Re^n - We^m \cdot e^n (e-1)$$

$$= [R - We^m (e-1)]\, e^n$$

und hieraus

$$e^n = \frac{R}{R - We^m (e-1)} \quad \ldots \quad (47).$$

Nehmen wir beiderseits die Logarithmen, so erhalten wir

$$n \log e = \log \frac{R}{R - We^m (e-1)}$$

$$= \log R - \log [R - We^m (e-1)]$$

und endlich

$$n = \frac{\log R - \log [R - We^m (e-1)]}{\log e} \quad \ldots \quad (48).$$

Dies ist die Formel für die logarithmische Berechnung des Werthes von n. Man wird jedoch in den meisten Fällen auch die Tafel IV. zur Berechnung benutzen können und zwar mit Zugrundelegung der sich aus (43) sofort ergebenden Formel

$$\frac{We^m}{R} = w = \frac{e^n - 1}{(e-1)e^n} \quad \ldots \quad (49).$$

Da nämlich Tafel IV. die Werthe von w für verschiedene Procentsätze enthält, so wird man den mit Hülfe von Taf. I. berechneten Werth von $\frac{We^m}{R}$ in der zu den gegebenen Procenten gehörigen Vertikalspalte der Taf. IV. aufsuchen. Finden sich nun in dieser Spalte zwei Zahlenwerthe, zwischen welche der gesuchte Werth fällt, so fällt auch die gesuchte Anzahl der Jahre zwischen die beiden in der ersten Vertikalspalte stehenden Zahlen.

Endlich kann man auch die Berechnung blos mit Hülfe der Taf. I. ausführen, wenn man die Formel (47) zu Grunde legt. Man hat dann zunächst den Ausdruck

$$W e^m (e - 1)$$

mit Hülfe von Taf. I. zu berechnen, den gefundenen Werth von R abzuziehen und mit dem Reste in R zu dividiren. Die gefundene Zahl sucht man dann in der zu den gegebenen Procenten gehörigen Vertikalspalte der Taf. I. und verfährt im Uebrigen ebenso, wie vorher bei Taf. IV. angegeben wurde. Wir werden zur Erläuterung ein Beispiel auf alle drei verschiedene Arten berechnen.

44. Beispiel.

Wer beim Janus in Hamburg in seinem zurückgelegten 50. *Lebensjahre die Summe von* 99 *Thlr. einlegt, dem wird vom* 55. *Jahre ab bis zum Tode alljährlich eine Pension von* 10 *Thlr. gewährt. Was nimmt die Gesellschaft bei dieser Versicherung als muthmaassliches Todesjahr des Versicherten an, wenn* $3\frac{1}{2}$ % *berechnet werden?*

A. Lösung durch logarithmische Berechnung.

Es ist hier $W = 99$, $R = 10$, $m = 5$ und $e = 1{,}035$. Setzen wir diese Werthe in Formel (48) ein, so erhalten wir

$$n = \frac{\log 10 - \log(10 - 99 \,.\, 1{,}035^5 \,.\, 0{,}035)}{\log 1{,}035}.$$

Berechnen wir zuerst den Ausdruck

$$99 \,.\, 1{,}035^5 \,.\, 0{,}035,$$

so haben wir

$$\left.\begin{array}{rl} \log\ 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\ \log\ 1{,}035^5 &= 0{,}0747015 \\ \log\ 99 &= 1{,}9956352 \\ \log\ 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$0{,}6144047.$$

Durch Zurückschlagen finden wir

$$99 \,.\, 1{,}035^5 \,.\, 0{,}035 = 4{,}11533.$$

Dies abgezogen von 10,00000

4,11533

giebt 5,88467;

es bleibt somit noch zu berechnen

$$n = \frac{\log 10 - \log 5{,}88467}{\log 1{,}035}.$$

$$\left.\begin{array}{rl} \log\ 10 &= 1{,}0000000 \\ \log\ 5{,}88467 &= 0{,}7697221 \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$0{,}2302779.$$

Dividiren wir in diese Zahl mit

$$\log\ 1{,}035 = 0{,}0149403,$$

so erhalten wir endlich

$$n = \frac{0{,}2302779}{0{,}0149403} = \frac{2302779}{149303} = 15{,}4.$$

Die Gesellschaft nimmt also an, der Rentenkäufer werde c. 71 Jahre alt werden.

B. Lösung mit Hülfe der Tafel I. und IV.

Setzen wir die vorher angegebenen Werthe in Formel (49), so erhalten wir

$$\frac{99 \,.\, 1{,}035^5}{10} = \frac{1{,}035^n - 1}{0{,}035 \,.\, 1{,}035^n}.$$

Berechnen wir zunächst die linke Seite, so ist nach Taf. I.

$$1{,}035^5 = 1{,}187686.$$

Dies mit 99 multiplicirt giebt

$$117{,}5810,$$

wovon der 10te Theil

$$11{,}75810$$

ist. Wir haben somit

$$11{,}75810 = \frac{1{,}035^n - 1}{0{,}035 \,.\, 1{,}035^n}.$$

Jetzt suchen wir die Zahl

$$11{,}75810$$

in der zu $3\frac{1}{2}\ \%$ gehörigen Vertikalspalte der Taf. IV. und finden daselbst die einschliessenden Zahlenwerthe

$$11{,}517 \ldots \text{ und } 12{,}094_z \ldots,$$

wozu die Jahre 15 und 16 gehören.

Das gesuchte n liegt also zwischen 15 und 16.

C. Lösung mit Hülfe der Tafel I. allein.

Wir haben hier die Formel (47) zu benutzen und erhalten nach Einsetzung der betreffenden Werthe in dieselbe

$$1{,}035^n = \frac{10}{10 - 99 \,.\, 1{,}035^5 \,.\, 0{,}035}.$$

Nach Tafel I. ist

$$1{,}035^5 = 1{,}187686,$$

dies mit 99 multiplicirt giebt

$$117{,}5810$$

und dieses noch mit 0,035 multiplicirt giebt

$$4{,}11534.$$

Nun ist

$$\left.\begin{array}{r} 10{,}00000 \\ 4{,}11534 \end{array}\right\} \text{subtrahirt,}$$

$$5{,}88466$$

folglich

$$1{,}035^n = \frac{10}{5{,}88466}$$

$$= 1{,}69 \ldots$$

Suchen wir diese Zahl unter $3\frac{1}{2}\ \%$ in Tafel I. auf, so finden wir als einschliessende Zahlenwerthe

$$1{,}67 \ldots \text{ und } 1{,}73 \ldots,$$

wozu wieder die Jahre 15 und 16 gehören.

Anmerkung. Noch rascher kann man zum Ziele kommen, wenn man zuletzt die Taf. II. benutzt. Wir hatten nämlich

$$1{,}035^n = \frac{10}{5{,}88466},$$

folglich ist

$$\frac{1}{1{,}035^n} = 0{,}588466.$$

Suchen wir die rechts stehende Zahl unter $3\frac{1}{2}$ % in Taf. II. auf, so finden wir die einschliessenden Zahlen

0,596.. und 0,576...

zu denen ebenfalls die Jahre 15 und 16 gehören.

§. 25.

Berechnung des Zinsfusses.

Die direkte Berechnung des Zinsfusses führt auch hier auf die Lösung einer algebraischen Gleichung. Suchen wir mit Umgehung derselben nach einem praktischen Verfahren, so zeigt sich, dass der früher eingeschlagene Weg der angenäherten Berechnung mit Hülfe der Tafeln sich hier nicht anwenden lässt und dass man im Allgemeinen zur Annahme gewisser Procentsätze behufs der immer engeren und engeren Einschliessung keinen Anhaltepunkt hat. Man wird also hier in den Fall gerathen können, erst durch viele vorgängige Procentsubstitutionen zum Ziele zu gelangen. Glücklicherweise macht aber auch die Praxis dergleichen Berechnungen gewiss nur sehr selten nöthig. Die Banken nämlich haben wohl immer für vereinnahmte Gelder einen feststehenden Procentsatz und kann es sich also nur noch darum handeln, wie viel Procente sie für verausgabte Gelder nehmen. Blicken wir nun auf §. 21. zurück, so sehen wir, dass

$$A = W.e^{m+n}$$

die Leistung des Rentenkäufers ist. Da diese Leistung in die Kasse der Bank fliesst, so wird sie eben nach dem feststehenden Procentsatze der Bank zu bemessen sein. Die Leistung der Bank hingegen wird ausgedrückt durch

$$B = R.\frac{e^n - 1}{e - 1},$$

folglich wird der hier angenommene Zinsfuss der fragliche sein. Der Werth von *e* in *A* ist demnach ein gegebener,

während der Werth des e in B eben gesucht wird. Um Verwechselung zu verhüten, wollen wir das erstere mit dem griechischen Buchstaben ε *(epsilon)* bezeichnen, so dass unsere Formel jetzt nun folgende ist:

$$W\varepsilon^{m+n} = R \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} .$$

Da hier die linke Seite vollständig berechnet werden kann, so fällt die Formel mit der im zweiten Kapitel aufgestellten

$$S = C \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}$$

zusammen.

III. Früher beginnende nachschussweise Zeitrenten. Sofort beginnende vorschussweise Zeitrenten.

§. 26.

Theorie der Rechnung.

Fassen wir zunächst den ersten Satz der Ueberschrift ins Auge, so können wir uns die Aufgabe stellen:

Jemand kauft sich eine nachschussweise Rente R *auf* n *Jahre, will jedoch das Aequivalent* W *für dieselbe erst abtragen, nachdem er bereits die Rente* m *Jahre hinter einander genossen hat. Wie viel wird das Aequivalent oder die Kaufsumme betragen, wenn* p % *Zinsen berechnet werden?*

In diesem Falle hat die Bank nur $(n - m)$ Jahre den Zinsengenuss von der Kaufsumme W und es beträgt also die Gesammtleistung des Rentenkäufers

$$A = W e^{n-m}.$$

Der Rentenirer hingegen bezieht die Rente die vollen n Jahre lang, mithin beträgt die Leistung der Rentenbank

$$B = R \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} .$$

Da $A = B$ sein muss, so erhalten wir als Berechnungsformel

$$W.e^{n-m} = R \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} \quad \ldots \quad (50);$$

oder auch, da

$$e^{n-m} = \frac{e^n}{e^m}$$

ist,

$$\frac{W.e^n}{e^m} = R \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} \quad \ldots \quad (51).$$

Wird nun, wie in der vorher gestellten Aufgabe, W gesucht, hat man

$$W = R \cdot \frac{(e^n - 1)\, e^m}{(e - 1)\, e^n} \quad \ldots \quad (52).$$

§. 27.

Berechnung der Kaufsumme.

Ist W gesucht, so wird man den Ausdruck

$$\frac{e^n - 1}{(e - 1)\, e^n} = w$$

mittelst der Taf. IV. und

$$e^m = v$$

mittelst der Taf. I. bestimmen und darauf das Produkt $R.w.v$ bilden, welches dem gesuchten Werthe W gleich sein muss.

45. Beispiel.

Jemand will sich in seinem 20. *Jahre eine nachschussweise Rente im Betrage von* 200 *Thlr. auf* 30 *Jahre kaufen, kommt aber erst nach erreichtem* 24. *Lebensjahre in den Besitz seines Vermögens; wie viel wird er zu dieser Zeit für die Rente geben müssen, wenn* 4 % *Zinsen berechnet werden?*

Es ist hier $R = 200$, $m = 4$, $n = 30$, $e = 1{,}04$ und W wird gesucht, wir haben demnach

$$w = \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{30}}$$

und

$$v = 1{,}04^4.$$

Aus Tafel IV. finden wir

$$w = 17{,}2920333$$

und aus Tafel I.

$$v = 1{,}169859,$$

folglich

$$W = 200 \,.\, 17{,}2920333 \,.\, 1{,}169859.$$

Wählen wir die Berechnung durch Logarithmen, so haben wir

$$\begin{aligned} \log 200 &= 2{,}3010300 \\ \log 17{,}292\,.\,. &= 1{,}2378459 \\ \log 1{,}169859 &= 0{,}0681335 \\ \hline \log W &= 3{,}6070094 \\ W &= 4045{,}8\,.\,. \end{aligned}$$

Die Kaufsumme würde also c.

4045 Thlr. 24 Sgr.

betragen.

§. 28.

Berechnung der jährlichen Zahlung.

Wir sahen vorher, dass

$$W = R.v.w,$$

und zwar

$$v = e^m$$

und

$$w = \frac{e^n - 1}{(e-1)e^n}$$

war. Es geht hieraus hervor, dass

$$R = \frac{W}{v.w}$$

ist. Um demnach *R* zu berechnen, kann man *v* in Taf. I. und *w* in Tafel IV. suchen und mit dem Produkte beider Werthe in *W* dividiren; besser wird man aber thun, wenn man, statt mit *v* zu dividiren, mit

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{e^m}$$

multiplicirt; und da Taf. II. die Werthe von $\frac{1}{e^m}$ enthält, so wird man in folgender Weise rechnen: man sucht den Werth von $\frac{1}{e^m}$ in Taf. II., multiplicirt damit *W* und dividirt das Produkt durch den in Taf. IV. gefundenen Werth für *w*.

46. Beispiel.

Jemand kauft ein Grundstück für 5000 *Thlr. unter der Bedingung, diese Summe nach* 5 *Jahren einzuzahlen; später einigen sich beide Theile dahin, dass der Käufer seine Schuld binnen* 10 *Jahren durch alljährliche gleiche Raten tilgen soll. Wie viel hat er bei* 5 $^0/_0$ *Zinsen alljährlich abzutragen, wenn die Leistung durch Theilzahlungen der in einer Summe ganz gleich sein soll?*

Es ist in diesem Falle

$$W = 5000,\ m = 5,\ n = 10,\ e = 1{,}05,$$

folglich

$$v = 1{,}05^5$$

$$\text{und}\quad w = \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^{10}}\ .$$

Wir finden in Taf. II. den umgekehrten Werth von v, oder

$$\frac{1}{1{,}05^5} = 0{,}7835262,$$

Dies mit 5000 multiplicirt, giebt:

$$3917{,}6310.$$

Dieser Werth ist noch zu dividiren durch w. Wir finden dies in Taf. IV., nämlich

$$w = 7{,}7217349.$$

Es ist mithin

$$R = \frac{3917{,}6310}{7{,}7217349}$$

$$= 507{,}3\ldots$$

Eine jährliche Abzahlung im Betrage von c. 507 Thlr. 9 Sgr. wird also der Zahlung in einer Summe gleich kommen.

§. 29.

Berechnung der Dauer der jährlichen Zahlung.

Aus Formel (51) erhalten wir

$$\frac{W}{e^m \,.\, R} = \frac{e^n - 1}{(e-1)e^m} \quad \ldots \quad (53).$$

Um mittelst dieser Formel n zu berechnen, haben wir zunächst mit Hülfe der Taf. II. die linke Seite zu berechnen

und dann den gefundeneu Werth in der zu den gegebenen Procenten gehörigen Vertikalspalte der Tat. IV. aufzusuchen. Die gesuchte Zeitdauer fällt dann zwischen die zu den einschliessenden Zahlenwerthe der genannten Spalte gehörigen Jahre.

47. Beispiel.

Auf wie lange kann Jemandem von dessen 26. *Jahre an eine Rente von* 400 *Thlr. gewährt werden für eine Summe von* 7000 *Thlr., wenn der Rentenkäufer letztere Summe erst im* 32. *Jahre zu zahlen im Stande ist und* $3\frac{1}{2}$ % *Zinsen berechnet werden?*

Wir haben hier $W = 7000$, $R = 400$, $m = 6$ und $e = 1{,}035$, folglich nach Einsetzung dieser Werthe in (53)

$$\frac{7000}{1{,}035^6 \,.\, 400} = \frac{1{,}035^n - 1}{0{,}035 \,.\, 1{,}035^n}.$$

Aus Taf. II. finden wir

$$\frac{1}{1{,}0356^6} = 0{,}8135006,$$

die linke Seite der vorigen Gleichung ist demnach

$$\frac{7000 \,.\, 0{,}8135006}{400} = \frac{70 \,.\, 0{,}8135006}{4}.$$

$$= 14{,}23626.$$

Suchen wir diesen Werth in der zu $3\frac{1}{2}$ % gehörigen Vertikalspalte, so finden wir als einschliessende Werthe

14,2124033 und 14,6979742,

wozu die Jahre 20 und 21 gehören. Die Rente kann demnach fast genau 20 Jahre, d. h. also bis zum 46. Lebensjahre des Rentenkäufers gezahlt werden.

§. 30.

Schlussbemerkung.

Es ist jetzt leicht zu übersehen, dass die bis jetzt noch nicht betrachteten sofort beginnenden vorschussweisen Renten mit in die Klasse der früher beginnenden nachschussweisen Renten gerechnet werden können. Da nämlich bei ersteren die Zahlung am Anfange des Jahres erfolgt, so ist sie ein Jahr früher als die bei der nachschussweisen Rente und es ist in der Formel (51) nur $m=1$ zu setzen, so dass wir erhalten

$$\frac{W.e^n}{e} = R.\frac{e^n-1}{e-1}$$

$$\text{oder } \frac{W}{e} = R.\frac{e^n-1}{(e-1)e^n} \quad \ldots \quad (54).$$

Ein Beispiel möge für diese Renten genügen.

48. Beispiel.

Welche vorschussweise Rente kann auf 15 *Jahre für eine Kaufsumme von* 2750 *Thlr. gewährt werden, wenn* 4 % *berechnet werden?*

Wir haben hier $W = 2750$, $e = 1{,}04$, $n = 15$. Setzen wir wieder

$$\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n} = w,$$

so erhalten wir aus (54)

$$\frac{W}{e.w} = R.$$

Wir haben also durch 2750 durch $e.w$ zu dividiren. Statt mit e zu dividiren, könnten wir wieder mit dem aus Taf. II. zu ersehenden Werthe

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}9615385$$

multipliciren und das Produkt durch den aus Taf. IV. zu findenden Werth von w dividiren. Es ist jedoch hier bequemer den Werth von

$$w = 11{,}1183874$$

mit 1,04 zu multipliciren und mit dem Produkte

$$1{,}04.11{,}1183874 = 11{,}5631229$$

in

$$W = 2750$$

zu dividiren. Wir erhalten hierdurch

$$R = \frac{2750}{11{,}5631229}$$

$$= 237{,}83\ldots$$

Es kann mithin eine jährliche Rente von c. 237 Thlr. 25 Sgr. gewährt werden.

Fünftes Kapitel.

Rentenerwerbung durch Partialeinzahlungen. — Pensionsrechnung.

§. 31.

Theorie dieser Rechnung.

Die Erwerbung einer Rente kann ausser durch Zahlung der Mise in einer Summe auch durch vorgängige Partialeinzahlungen erfolgen. In Bezug auf die letztere Versicherungsart, mit der wir uns im Folgenden beschäftigen wollen, setzen wir den Fall:

Jemand zahlt an eine Bank alljährlich m *Jahre hinter einander pränumerando* C *Thlr. ein, um sich dadurch eine im* k*ten Jahre nach der letzten Einzahlung beginnende vorschussweise Rente* R *auf* n *Jahre zu erwerben. Die Bank berechnet für vereinnahmte Gelder* π *(ausgesprochen pi) und für verausgabte* p %.

Um hier die Berechnungsformel zu finden, haben wir wieder zu untersuchen, was beide Parteien nach Auszahlung der letzten Rente geleistet haben. Durch Gleichsetzung dieser Leistungen werden wir in den Besitz der gewünschten Formel gelangen. Setzen wir

$$\frac{\pi + 100}{100} = \varepsilon$$

und

$$\frac{p + 100}{100} = e,$$

so hat zunächst der Rentenkäufer durch seine m malige Einzahlung der Summe C geleistet,

$$A = C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} .$$

Diese Summe ist dann die k Jahre bis zum Beginn der Rente und ausserdem noch die n Jahre während des Rentengenusses in den Händen der Bank geblieben und dadurch angewachsen zu

$$A\varepsilon^k . \varepsilon^n \text{ oder } A\varepsilon^{k+n} = C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^{k+n} = B.$$

Der Werth von B ist also die Gesammtleistung des Rentenkäufers.

Die Bank hingegen gewährt dafür n Jahre lang pränumerando die Rente R und leistet deshalb in Summa

$$R \cdot \frac{e(e^n - 1)}{e - 1} = C.$$

Setzen wir $C = B$, so erhalten wir

$$C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^{k+n} = R \cdot \frac{e(e^n - 1}{e - 1} \ldots \quad (55).$$

Dies ist die Formel, nach der wir zu rechnen haben.

§. 32.

In voriger Formel ist auch die für Pensionsrechnung mit enthalten. Es ist hier nur der einzige Unterschied, dass die Pensionsausahlung sofort nach Einzahlung des letzten Beitrags erfolgt. Wird nämlich Jemand pensionirt, so ist er von den bis dahin gezahlten Beiträgen entbunden und tritt sofort in den Genuss seiner Pension. Es ist somit hier blos $k = 0$ zu setzen, wodurch also die Formel (55) sich in folgende umändert:

$$C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^n = R \cdot \frac{e(e^n - 1)}{e - 1} \ldots \quad (56).$$

§. 33.

Bestimmung der jährlichen Einzahlung.

49. Beispiel.

Es will Jemand von seinem 25*sten Jahre ab* 15 *Jahre hinter einander am Anfange jedes Jahres eine bestimmte Summe an eine Bank einzahlen, um sich eine vom* 55. *Jahre an beginnende Rente von* 100 *Thaler auf* 20 *Jahre zu sichern.*

Wie viel wird die jährliche Einzahlung betragen müssen, wenn die Bank vereinnahmte Gelder mit 3 *und verausgabte mit* 4 % *berechnet?*

Wir haben hier $R = 100$, $\varepsilon = 1{,}03$, $e = 1{,}04$, $m = 15$, $k = 15$, $n = 20$, und C ist gesucht. Aus (55) erhalten wir

$$C = R \cdot \frac{\frac{e(e^n - 1)}{e - 1}}{\frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1}} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{k+n}} \quad \ldots \quad (57),$$

oder wenn wir der Kürze halber

$$\frac{e(e^n - 1)}{e - 1} = u$$

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} = v$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{\varepsilon^{k+n}} = w$$

setzen,

$$C = \frac{R \cdot u \cdot w}{v} \quad \ldots \quad (58).$$

Die Werthe von u und v werden in Taf. III. und der von w in Taf. II. gefunden. Wir finden nämlich in unserem Falle

$$u = \frac{104\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04} = 30{,}969202,$$

$$v = \frac{1{,}03\,(1{,}03^{15} - 1)}{0{,}03} = 19{,}156881,$$

$$w = \frac{1}{1{,}03^{35}} = 0{,}3553834.$$

Setzen wir diese Werthe in (58) ein, so erhalten wir, da $R = 100$ ist

$$C = \frac{100 \cdot 30{,}969202 \cdot 0{,}3553834}{19{,}156881},$$

ausgerechnet

$$C = 57{,}45 \ldots$$

Die jährliche Einzahlung beträgt demnach c. 57 Thl. 13 Sgr. 6 Pf.

50. Beispiel.

Wenn sich durch Erfahrung herausgestellt hätte, dass die Personen einer Beamtenklasse im Allgemeinen im 50sten Jahre dienstunfähig würden und im 55sten mit Tode abgingen, welchen Beitrag müsste dann ein Pensionsinstitut von einem im 30sten Jahre stehenden Beitretenden alljährlich nehmen, um ihm für die Zeit seiner Dienstunfähigkeit eine Pension von 200 Thlr. zu sichern, wenn bei vereinnahmten Geldern $3\frac{1}{2}$ % und bei verausgabten 4 % Zinsen berechnet werden?

Wir haben hier $R = 200$, $\varepsilon = 1{,}035$, $e = 1{,}04$, $m = 20$, $n = 5$. Durch Einsetzung dieser Werthe in (56) erhalten wir

$$C = \frac{1{,}035\,(1{,}035^{20}-1)}{0{,}035} \cdot 1{,}035^{5} = \frac{200 \cdot 1{,}04\,(1{,}04^{5}-1)}{0{,}04}$$

oder wenn wir

$$\frac{1{,}04\,(1{,}04^{5}-1)}{0{,}04} = u$$

$$\frac{1{,}035\,(1{,}035^{20}-1)}{0{,}035} = v$$

und $\frac{1}{1{,}035^{5}} = w$ setzen,

$$C = \frac{200 \cdot u \cdot w}{v}.$$

Wir finden in Taf. III.

$$u = 5{,}632975$$
$$v = 29{,}269471$$

und in Tafel II.

$$w = 0{,}8419732,$$

es ist also

$$C = \frac{200 \cdot 5{,}632975 \cdot 0{,}841973}{29{,}269471}$$

ausgerechnet

$$C = 32{,}408\ldots$$

Der Pensionsbeitrag müsste dann ziemlich $32\frac{1}{2}$ Thlr. betragen.

§. 34.

Bestimmung der Rente oder Pension.

Aus der Formel (55) erhalten wir

$$R = C \cdot \frac{\frac{\varepsilon\,(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^{k+n}}{\frac{e\,(e^n - 1)}{e - 1}} \quad \ldots (59)$$

oder wenn wir wieder

$$\frac{e\,(e^n - 1)}{e - 1} = u$$

$$\frac{\varepsilon\,(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} = v,$$

hingegen $\varepsilon^{k+n} = w$ setzen,

$$R = C \cdot \frac{v \cdot w}{u} \quad \ldots \quad (60).$$

Die Werthe von v und w werden wieder mittelst der Taf. III. gefunden, hingegen w mittelst der Taf. I.

51. Beispiel.

Jemand zahlt 20 *Jahre hinter einander alljährlich* 15 *Thlr. in eine Rentenbank, um vom* 10*ten Jahre nach der letzten Einzahlung ab sich auf* 16 *Jahre eine Rente zu sichern. — Welche Rente wird die Bank geben können, wenn sie vereinnahmte Gelder mit* $3\frac{1}{2}$ *% und verausgabte mit* $4\frac{1}{2}$ *% berechnet?*

Es ist hier $C = 15$, $m = 20$, $k = 10$, $n = 16$, $e = 1{,}045$, $\varepsilon = 1{,}035$.

Indem wir nach Formel (60) rechnen, haben wir nach Taf. III.

$$u = \frac{1{,}045\,(1{,}045^{16} - 1)}{0{,}045} = 23{,}741707$$

$$\text{und} \quad v = \frac{1{,}035\,(1{,}035^{20} - 1)}{0{,}035} = 29{,}269471$$

und nach Taf. I.

$$w = 1{,}035^{26} = 2{,}445959,$$

mithin

$$R = \frac{15\,.\,29{,}269471\,.\,2{,}445959}{23{,}741707},$$

ausgerechnet

$$C = 45{,}23\ldots$$

Die Bank wird also eine Rente von c. 45 Thlr. 7 Sgr. geben können.

52. Beispiel.

Ich habe vom 28. *Lebensjahre an jährlich einen Pensionsbeitrag von* 6 *Thlr.* 24 *Sgr. an die preuss. Beamten-Pensions-Kasse gezahlt; gesetzt nun ich würde im* 58. *Jahre pensionirt und stürbe im* 65*sten, auf welche Pension würde ich dann nach meinen Beiträgen einen Anspruch gehabt haben, wenn die Pensionskasse durchweg* 4 % *berechnet?*

Es ist in diesem Falle

$$C = 6{,}8,\ m = 30,\ n = 7,\ \varepsilon = e = 1{,}04.$$

Wir rechnen auch hier nach Formel (60), wo aber

$$u = \frac{1{,}04\,(1{,}04^7 - 1)}{0{,}04}$$

$$v = \frac{1{,}04\,(1{,}04^{30} - 1}{0{,}04}$$

und weil $k = 0$ ist,

$$w = 1{,}04^7$$

ist. Aus Taf. III. finden wir

$$u = 8{,}214226,$$

$$v = 58{,}328335$$

und aus Taf. I.

$$w = 1{,}315932,$$

also

$$R = \frac{6{,}8\,.\,58{,}328335\,.\,1{,}315932}{8{,}214226},$$

ausgerechnet

$$R = 63{,}54.$$

Ich würde also nur einen Anspruch auf eine Pension von c. 63 Thlr. 16 Sgr. gehabt haben.

Bei diesem Beispiele lässt sich auch noch eine andere Berechnungsart anwenden, die wir der Uebung wegen im folgenden noch mittheilen wollen. Gehen wir nämlich auf Formel (56) zurück, so erhalten wir, weil $\varepsilon = e$ ist,

$$C \cdot \frac{e(e^m - 1)}{e-1} \cdot e^n = R \cdot \frac{e(e^n - 1)}{e-1},$$

und hieraus

$$R = \frac{C \cdot \frac{e(e^m - 1)}{e-1} \cdot \frac{1}{e}}{e^n - 1}$$

$$(e-1)e^n$$

oder wenn wir

$$\frac{e(e^m - 1)}{e-1} = x$$

$$\frac{1}{e} = y$$

und $$\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n} = z$$

setzen,

$$R = \frac{C \cdot x \cdot y}{z}.$$

Wir finden nun in Taf. III.

$$x = 58{,}328335$$

und in Taf. II.

$$y = 0{,}961538$$

und endlich in Taf. IV.

$$z = 6{,}0020547.$$

Wir haben somit

$$R = \frac{6{,}8 \cdot 58{,}328335 \cdot 0{,}961538}{6{,}0020547},$$

was ausgerechnet denselben Werth für R giebt, als wir vorher fanden.

§. 35.

Bestimmung der Dauer des Renten- oder Pensionsgenusses.

Ist in der Formel (55) der Werth von n unbekannt, so erfordert die direkte Auffindung dieses Werthes die Auflösung einer sogenannten transcendenten Gleichung, wofür die Mathematik keine allgemeine Regel kennt. Durch einen kleinen Kunstgriff gelangt man jedoch auch hier leicht indirekt zum iele. Gehen wir nämlich auf unsere Grundformel

$$C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^k \cdot \varepsilon^n = R \cdot \frac{e(e^n - 1)}{e - 1}$$

zurück, so können wir dieselbe, wenn wir den Faktor ε^n durch Division auf die rechte und den Faktor e ebenso auf die linke Seite bringen, auch so schreiben

$$C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^k \cdot \frac{1}{e} = R \cdot \frac{e^n - 1}{(e-1)\varepsilon^n} \cdot \cdot$$

Nehmen wir nun an, dass ε kleiner als e sei, so würden wir, wenn wir auf der rechten Seite statt ε auch e setzten, ein zu grosses n bekommen. Wir hätten nämlich angenommen, dass die Rentenbank dem Einleger seine Leistungen während der Dauer des Rentengenusses mit höheren Procenten anrechnete, was natürlich wegen der dadurch vergrösserten Leistung auch einen längeren Rentengenuss nach sich ziehen würde. Wären wir aber im Stande dieses allerdings etwas zu grosse n zu bestimmen, so hätten wir wenigstens einen Ausgangspunkt gefunden, von dem aus wir durch allmälige Verminderung des n dem wahren Werthe immer näher und näher kommen könnten. In der That lässt sich aber das durch die vorige Annahme etwas vergrösserte n ohne Schwierigkeit finden. Die vorige Formel geht nämlich unter der gemachten Voraussetzung über in

$$\frac{C}{R} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^k \cdot \frac{1}{e} = \frac{e^n - 1}{(e-1)e^n} \quad \ldots \quad (61),$$

worin die Ausdrücke

$$u = \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \quad \text{nach Taf. III.}$$

$$v = \varepsilon^k \quad \text{nach Taf. I.}$$

$$w = \frac{1}{e} \quad \text{nach Taf. II.}$$

und endlich das n in dem Ausdrucke

$$\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n} \quad \text{nach Taf. IV.}$$

gefunden werden können.

53. Beispiel.

Jemand zahlt 8 Jahre lang zu Anfange jedes Jahres 50 Thlr. in eine Rentenbank, um sich dadurch eine jährliche

vorschussweise Rente von 100 *Thlr. zu erwerben, welche* 5 *Jahre nach der letzten Einzahlung beginnt. Auf wie viel Jahre kann die Bank besagte Rente gewähren, wenn sie vereinnahmte Gelder mit* 3, *hingegen verausgabte mit* 4 % *berechnet?*

Wir haben in diesem Falle $C = 50$, $R = 100$, also

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,,\ \varepsilon = 1{,}03,\ e = 1{,}04,\ m = 8,\ k = 5$$

und n ist gesucht. Wir finden nun aus Taf. III.

$$u = 9{,}159106,$$

aus Taf. I.

$$v = 1{,}159274$$

und aus Taf. II.

$$w = 0{,}9615385.$$

Setzen wir diese Werthe in Formel (61) ein, so erhalten wir

$$0{,}5\,.\,9{,}159106\,.\,1{,}159274\,.\,0{,}9615385 = \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04\,.\,1{,}04^n}\,.$$

Die Ausrechnung der linken Seite ergiebt

$$5{,}1049\,..$$

Suchen wir diesen Werth unter 4 % in Taf. IV., so finden wir die einschliessenden Werthe

$$4{,}4518\,..\quad \text{für } n = 5$$
$$\text{und } 5{,}2421\,..\quad \text{für } n = 6.$$

Unter allen Umständen ist nun $n = 6$ zu gross, es fragt sich nur, ob auch $n = 5$ noch zu gross sein wird. Bedenken wir zunächst, dass ein zu grosses n die rechte Seite der Formel (55), welche die Leistung der Rentenbank ausdrückt, zu gross macht, so ersehen wir, dass wir von $n = 6$ so lange zurückgehen müssen, bis die linke Seite besagter Formel einmal grösser als die rechte wird. Setzen wir nun in diese Formel $n = 5$ ein, so ist deren linke Seite nach Taf. III. u. I.

$$0{,}5\,.\,\frac{1{,}03\,(1{,}03^8 - 1)}{0{,}03}\,.\,1{,}03^{10} = 05\,.\,9{,}159106\,.\,1{,}343916$$
$$= 6{,}1544\ldots,$$

hingegen die rechte Seite nach Taf. III.

$$\frac{1{,}04\,(1{,}04^5-1)}{0{,}04} = 5{,}6329..$$

Wir sehen also, dass die linke Seite schon jetzt grösser geworden ist, als die rechte, dass mithin 5 Jahre für die Dauer des Rentengenusses anzunehmen ist.

Ein anderes Verhältniss zwischen ε und e kann eintreten, wenn bei jährlichen Einzahlungen halb-, vierteljährige oder monatliche Renten erworben werden sollen und bei Einzahlungen die Zinsen alljährlich, bei den Renten hingegen am Schlusse jedes Termins zum Kapitale geschlagen werden. In diesem Falle, wo e die Terminprocente bezeichnet, wird jedoch nicht ε in e, sondern ε^n resp. in e^{2n}, e^{4n}, e^{12n} zu ändern sein, so dass also auch hier in Betreff der Grösse des erlangten n noch das vorige gilt. Auch dafür wollen wir ein Beispiel berechnen.

54. Beispiel.

Jemand zahlt 8 *Jahre hinter einander praenumerando* 50 *Thlr. in eine Rentenbank, auf wie lange wird die Bank eine* 5 *Jahre nach der letzten Einzahlung beginnende Vierteljahrrente von* 25 *Thlr. gewähren können, wenn bei den Einzahlungen* 3 *und den Renten* 4 % *jährliche Zinsen berechnet werden und bei ersteren alljährlich, bei letzteren allvierteljährlich die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden?*

Da hier e durch die vierteljährlichen Zinsen berechnet wird, so ändert sich die Formel (55), wie leicht zu sehen, dahin ab, dass auf der rechten Seite $4n$ statt n zu setzen ist. Um nun ein dem vorigen analoges Verfahren in Anwendung bringen zu können, sind wir genöthigt, den Ausdruck ε^n vorläufig $= e^{4n}$ zu setzen, so dass also die Formel (61) übergeht in folgende:

$$\frac{C}{R} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m-1)}{\varepsilon-1} \cdot \varepsilon^k \cdot \frac{1}{e} = \frac{e^{4n}-1}{(e-1)\,e^{4n}} \quad \ldots \quad (62).$$

Es ist nun in unserem obigen Beispiele $\varepsilon = 1{,}03$, $e = 1{,}01$, $C = 50$, $R = 25$, also $\frac{C}{R} = 2$, $m = 8$, $k = 5$ und $4n$ wird gesucht.

Bezeichnen u, v, w dasselbe wie vorher, so finden wir aus den Tafeln III., I. und II. wieder

$$u = 9{,}159106$$
$$v = 1{,}159274,$$
$$\text{hingegen } w = 0{,}9900990.$$

Setzen wir diese Werthe in (62) ein, so erhalten wir

$$2 . 9{,}159106 . 1{,}159274 . 0{,}990099, \text{ ausgerechnet}$$

$$21{,}029.. = \frac{1{,}01^{4n} - 1}{0{,}01 . 1{,}01^{4n}} .$$

Suchen wir die linke Seite dieser Gleichung in Taf. IV. unter 1%, so finden wir

bei 23 Jahren 20,4558 . .
bei 24 Jahren 21,2433 . .

Hinsichtlich der Dauer des Rentengenusses sind nun offenbar 24 Termine zu viel und es wäre deshalb zunächst auf 23 zurückzugehen. Die anzuwendende Formel würde sein:

$$C . \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} . \varepsilon^k . \varepsilon^n = R \frac{e(e^{4n} - 1)}{e - 1} .$$

Es wäre hierin nun $4n = 23$, also $n = 4\frac{3}{4}$ einzusetzen.

Dies geht aber auf der linken Seite deshalb nicht, weil dort nur alljährlich die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden, es bleibt uns deshalb nichts weiter übrig, als $\varepsilon^n = 1{,}03^4$ zu setzen und zu dem gefundenen Werthe die Zinsen von $\frac{3}{4}$ Jahren noch zuzuzählen. Dividiren wir beide Seiten der letzten Formel durch R, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\frac{C}{R} . \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \varepsilon^{k+n} = 2 . \frac{1{,}03(1{,}03^8 - 1)}{0{,}03} . 1{,}03^9$$
$$= 2 . 9{,}159106 . 1{,}304773$$
$$= 23{,}911.$$

Wegen der noch fehlenden $\frac{3}{4}$ Jahre sind von letzterem Werthe bei 4% jährlicher Zinsen 3% zu nehmen, also $23{,}911 . \frac{3}{100}$ $= 0{,}717..$, so dass also die linke Seite der fraglichen Formel, wenn wir sie mit M bezeichnen, jetzt folgenden Werth hat:

$$M = 23{,}911.. + 0{,}717.. = 24{,}628..$$

Die rechte Seite hingegen ist

$$N = \frac{1{,}01\,(1{,}01^{23}-1)}{0{,}01} \text{ nach Taf. III.}$$

$$= 25{,}973\ .\ .$$

Da die rechte Seite, also die Leistung der Bank immer noch grösser ist, als die linke, die Leistung des Einlegers, so geht daraus hervor, dass $4n = 23$ noch zu gross angenommen ist. Setzen wir deshalb $4n = 22$, so haben wir für die linke Seite, wie leicht zu sehen,

$$M = 23{,}911 + 23{,}911\ .\ \frac{2}{100} \text{ (wegen der halbjährigen Zinsen)}$$

$$= 23{,}911 + 0{,}478$$

$$= 24{,}389.$$

Hingegen ist $N = \frac{1{,}01\,(1{,}01^{22}-1)}{0{,}01} = 24{,}716\ .\ .$

Da immer noch N grösser als M ist, so müssen wir noch auf $4n = 21$ zurückgehen. In diesem Falle erhalten wir

$$M = 23{,}911 + 23{,}911\ .\ \frac{1}{100}$$

$$= 23{,}911 + 0{,}239 = 24{,}150\ldots$$

Für die rechte Seite bekommen wir aus Taf. III.

$$N = 23{,}471\ .\ .$$

Da jetzt das Grössenverhältniss zwischen M und N umgeschlagen ist, so ist $4n = 21$ die als richtig anzunehmende Zahl und es kann demnach die Vierteljahrrente 21mal bezogen werden.

Anmerkung. Für die Pensionsrechnung ist das Verfahren ganz dasselbe, indem nur der Faktor ε^k auf der linken Seite fehlt. Wir halten deshalb die Berechnung eines Beispiels für diesen Fall für überflüssig und wollen statt dessen noch ein Beispiel berechnen, wo die Procente gleich sind.

55. Beispiel.

Jemand legt 8 *Jahre hinter einander zu Anfange eines jeden* 50 *Thlr. in eine Rentenbank, um sich eine* 5 *Jahre nach der letzten Einlage beginnende Jahrrente von* 25 *Thlrn. zu sichern. Wie vielmal wird er die Rente beziehen können, wenn durchweg* $3\frac{1}{2}$ *% Zinsen berechnet werden?*

Wir haben jetzt $\varepsilon = e$, folglich ist

$$C \cdot \frac{e\,(e^m - 1)}{e-1} \cdot e^k . e^n = R \cdot \frac{e\,(e^n-1)}{e-1} \ldots (63).$$

Um immer mit Hülfe der Tafeln bequem rechnen zu können, schreiben wir

$$\frac{C}{R} \cdot \frac{e\,(e^m - 1)}{e-1} \cdot e^{k-1} = \frac{e^n - 1}{(e-1)\,e^n} \ldots (64)\ ^*).$$

In unserem Beispiele ist nun $C=50$, $R=25$, also $\frac{C}{R} = 2$, ferner $e = 1{,}035$, $m = 8$, $k = 5$, also $k-1 = 4$ und n ist gesucht.

Nun ist nach Taf. III.

$$\frac{1{,}035\,(1{,}035^8-1)}{0{,}035} = 9{,}368496$$

und nach Taf. I.

$$1{,}035^4 = 1{,}147523.$$

Die linke Seite ist also

$$2 . 9{,}368496 . 1{,}147523 = 21{,}50\ldots$$

Suchen wir diese Zahl in Tafel IV. unter $3\frac{1}{2}\,\%$, so finden wir die einschliessenden Zahlen

21,35.. für 40 Jahre
und 21,59.. für 41 Jahre.

Die Rente wird also 40mal gezogen werden können.

§. 36.

Procentbestimmung.

In unserer Grundformel

$$C \cdot \frac{\varepsilon\,(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^{k+n} = R \cdot \frac{e\,(e^n-1)}{e-1}$$

kann entweder ε gegeben und e gesucht, oder e gegeben und ε gesucht sein. Im ersteren Falle hat die Rechnung keine Schwierigkeit, ist aber um so beschwerlicher im zweiten. Glücklicher Weise kommt dieser jedoch wohl nicht leicht vor,

---

*) Durch Division beider Seiten mit $e . e^n$; es ist nämlich $\frac{e^k}{e} = e^{k-1}$.

da alle Geldinstitute für vereinnahmte Gelder einen feststehenden Procentsatz haben. Wir können uns deshalb hier auch blos auf den ersteren beschränken. Es ist leicht zu ersehen, dass wenn die linke Seite der Formel

$$\frac{C}{R} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \varepsilon^{k+n} = \frac{e(e^n - 1)}{e - 1}$$

mit Hülfe der Tafeln III. und I. berechnet ist, die Aufsuchung dieses Werthes in der zu den gegebenen *n* Jahren gehörigen Horizontalreihe der Taf. III. uns — falls die Tafeln ausreichen — im Allgemeinen zu zwei einschliessenden Procentsätzen führen wird.

56. Beispiel.

Wer beim Janus in Hamburg vom 40. *Lebensjahre ab alljährlich eine Prämie von* 11 *Thlr.* 10 *Sgr. bis zu seinem* 50. *Jahre zahlt, dem wird von da ab eine halbjährliche Pension von* 10 *Thlrn. bis zu seinem Tode ausgezahlt. Gesetzt Jemand hätte sich unter diesen Verhältnissen versichert und stürbe in der zweiten Hälfte des* 57*sten Lebensjahres, wie viel Procente würden die gezahlten Pensionen der Gesellschaft eingetragen haben, wenn vereinnahmte Gelder mit* $3\frac{1}{2}\,\%$ *berechnet würden?*

Es ist hier $C = 11\frac{1}{3}$, $R = 10$, folglich $\frac{C}{R} = \frac{34}{30}$, ferner $m = 10$, $k = 0$, $n = 7$, $\varepsilon = 1{,}035$, und e ist gesucht. Da die Pensionen halbjährlich gezahlt werden, so haben wir auf der rechten Seite $n = 2.7 = 14$ zu setzen, wo dann das e sich auf die halbjährlichen Zinsen bezieht. Unsere Formel ist somit folgende:

$$\frac{34}{30} \cdot 1{,}35\ \frac{(1{,}035^{10} - 1)}{0{,}035} \cdot 1{,}035^7 = \frac{e(e^{14} - 1)}{e - 1} \cdot .$$

Nun ist

$$u = \frac{34}{30} = 1{,}1333\ldots$$

$$v = \frac{1{,}035\,(1{,}035^{10} - 1)}{0{,}035} = 12{,}141992 \text{ (nach Taf. III.)}$$

$w = 1{,}035^7 = 1{,}272279$ (nach Taf. I.)

Werden die Werthe u, v und w mit einander multiplicirt, so erhalten wir

$$17{,}507\ldots,$$

es ist also

$$\frac{e\,(e^{14}-1)}{e-1} = 17{,}507..$$

Suchen wir diese Zahl in der zu $n = 14$ gehörigen Querreihe der Taf. III., so finden wir die einschliessenden Zahlen

$$17{,}261781 \quad \text{bei } 2\tfrac{3}{4}\ \%$$

$$\text{und } 17{,}598914 \quad \text{bei } 3\ \%.$$

Es wird demnaeh $e = 2\frac{7}{8}\ \%$ angenommen werden können, so dass die jährlichen Zinsen c. $5\frac{3}{4}\ \%$ betragen würden.

---

§. 37.

Schlussbemerkung.

So allgemein die im Bisherigen benutzte Formel (55) auch ist, so kann doch noch unter Umständen eine weitere Verallgemeinerung nöthig werden. Um das, was wir meinen, ins hellste Licht zu stellen, wollen wir gleich ein Beispiel aufstellen.

57. Beispiel.

Jemand wird in seinem 25. Lebensjahre mit einem Gehalte von 800 Thlrn. angestellt unter der Bedingung, beim Eintritte der Dienstunfähigkeit sich eine Pensionirung mit der Hälfte seines Gehaltes gefallen zu lassen. Da dieser Beamte annimmt, dass ungefähr im 55 Jahre seine Pensionirung eintreten möchte und er gleichwohl dann sich ein Einkommen von 600 Thlr. bis zum Tode, den er — um sicher zu gehen — in das 80. Lebensjahr setzt, sichern möchte, so fasst er folgenden Entschluss. Er will von jetzt ab alljährlich bis zum 50sten Jahre praenumerando eine gewisse Summe in eine Sparkasse legen, welche 3 % Zinsen berechnet, will das

Geld dort aufsammeln lassen, dann im 50sten Jahre erheben und zu 4 % Zinsen austhun, die dafür ihm alljährlich zufliesseaden Zinsen wieder der Sparkasse zur Aufsammlung übergeben und endlich für die Gesammtersparniss sich im 55sten Jahre eine Rente von 200 Thalern, zahlbar bis zu seiner angenommenen Todeszeit, bei einer Bank kaufen, welche für vereinnahmte Gelder 3½ % und für verausgabte 4½ % berechnet. Wie viel wird seine jährliche Einlage in die Sparkasse betragen müssen?

Um zu einer allgemeinen Formel zu gelangen, wollen wir die Sparkasseneinlage mit C, die Procente der Sparkasse mit π, die Procente, welche für die dort ersparte Summe beim Ausleihen gewährt werden, mit π', die Vereinnahmungsprocente der Bank mit p und die Verausgabungsprocente derselben mit p' bezeichnen. Ferner wollen wir

$$\frac{\pi+100}{100} = \varepsilon,$$

$$\frac{p+100}{100} = e,$$

$$\frac{p'+100}{100} = e',$$

setzen und endlich annehmen, die Sparkasseneinlagen würden k Jahre hinter einander gemacht, dann würde die Ersparniss m Jahre ausgethan und dafür n Jahre lang die Rente R bezahlt. —

Zunächst wächst die Sparkasseneinlage an zu

$$A = C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k-1)}{\varepsilon-1}.$$

Diese Summe wird dann m Jahre zu π' % ausgethan, gewährt also jährlich eine Einnahme von

$$B = A \cdot \frac{\pi'}{100} = C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k-1)}{\varepsilon-1} \cdot \frac{\pi'}{100}.$$

Diese jährlichen Zinsen wachsen in der Sparkasse in m Jahren an zu

$$D = R \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1} = C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{\pi'}{100} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1},$$

so dass der Einleger demnach nach Verfluss dieser m Jahre in Summa besitzt

$$A + D = C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k - 1)}{\varepsilon - 1} + C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{\pi'}{100} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1}{\varepsilon - 1}$$

$$= C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k - 1)}{\varepsilon - 1}\left(1 + \frac{\pi'}{100} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1}\right) = M.$$

Diesen Betrag giebt er an die Bank ab und hat deshalb nach weiteren n Jahren in Summa geleistet

$$S = M \cdot e^n \quad \text{oder}$$

$$S = C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k - 1)}{\varepsilon - 1}\left(1 + \frac{\pi'}{100} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1)}{\varepsilon - 1}\right) \cdot e^n.$$

Die Gegenleistung der Bank beträgt nun, da diese n Jahre bei p' % die Rente R pränumerando zahlt:

$$S' = R \cdot \frac{e'(e'^n - 1)}{e' - 1} \cdot$$

Da nun $S = S'$ sein muss, so erhalten wir endlich als Berechnungsformel:

$$C \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^k - 1)}{\varepsilon - 1} \cdot \left(1 + \frac{\pi'}{100} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon^m - 1}{\varepsilon - 1}\right) \cdot e^n = R \cdot \frac{e'(e'^n - 1)}{e' - 1} \quad ..(65).$$

In unserem vorigen Beispiele ist $\varepsilon = 1{,}03$, $\pi' = 4$, $e = 1{,}035$, $e' = 1{,}045$, $k = 25$, $m = 5$, $n = 25$, $R = 200$ und C ist gesucht. Setzen wir diese Werthe in die Formel (65) ein, so erhalten wir

$$C \cdot \frac{1{,}03(1{,}03^{25} - 1)}{0{,}03}\left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{1{,}03(1{,}03^5 - 1)}{0{,}03}\right) \cdot 1{,}035^{25}$$

$$= 200 \cdot 1{,}045 \frac{(1{,}045^{25} - 1)}{0{,}045} \cdot$$

Nun ist

$$\frac{1{,}03\,(1{,}03^5 - 1)}{0{,}03} = 37{,}553042 \quad \text{(Taf. III.)}$$

$$\frac{1{,}03\,(103^5 - 1)}{0{,}03} = 5{,}468410 \quad \text{(Taf. III.)}$$

$$1{,}035^{25} = 2{,}363245 \quad \text{(Taf. I.)}$$

$$\frac{1{,}045\,(1{,}045^{25} - 1)}{0{,}045} = 46{,}570645 \quad \text{(Taf. III.)},$$

folglich haben wir

$$C \,.\, 37{,}553042 \,.\, (1 + 0{,}04 \,.\, 5{,}467410) \,.\, 2{,}363245 = 200 \,.\, 46{,}570645.$$

Berechnen wir zunächst die Klammer auf der linken Seite der Gleichung, so finden wir

$$1 + 0{,}04 \,.\, 5{,}468410 = 1{,}218736,$$

und erhalten also nach Einsetzung dieses Werthes

$$C = \frac{200 \,.\, 46{,}570645}{37{,}553042 \,.\, 1{,}218736 \,.\, 2{,}363245},$$

ausgerechnet

$$C = 86{,}12..$$

Die jährliche Sparkassen-Einlage müsste demnach c. 86 Thlr. 3 Sgr. 7 Pf. betragen.

Sechstes Kapitel.

Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

---

§. 38.

Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

Im gewöhnlichen Leben sagt man, das Eintreffen irgend eines ungewissen Ereignisses sei wahrscheinlich, wenn mehr Gründe dafür als dagegen sprechen, zweifelhaft, wenn ebensoviel Gründe dafür, als dagegen sprechen und endlich unwahrscheinlich, wenn für das Nichteintreffen mehr Gründe sprechen, als für das Eintreffen. Ganz in Uebereinstimmung mit diesen Grundbegriffen wird die mathematische Wahrscheinlichkeit ausgedrückt durch das Verhältniss der dem Eintreffen eines Ereignisses günstigen Fälle zu den überhaupt möglichen Fällen, d. h. also durch einen Bruch, dessen Zähler die Anzahl der günstigen Fälle, und dessen Nenner die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle ist. Bezeichnet W die Wahrscheinlichkeit, N die Anzahl der überhaupt möglichen, hingegen n die Anzahl der günstigen Fälle, so ist

$$W = \frac{n}{N} .$$

58. Beispiele.

a) Enthält z. B. ein Gefäss 7 weisse und 3 rothe Kugeln und es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass man beim Herausnehmen einer Kugel eine weisse treffen werde, so ist hier $n = 7$, $N = 10$, *also*

$$W = \frac{7}{10},$$

hingegen die Wahrscheinlichkeit eine rothe zu treffen,

$$W' = \frac{3}{10}.$$

b) Wären 5 *weisse und* 5 *rothe Kugeln im Gefässe, so wäre die Wahrscheinlichkeit, eine weisse zu treffen,*

$$W = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

und die Wahrscheinlichkeit, eine rothe zu treffen, auch

$$W' = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

c) Wären endlich in dem Gefässe blos 10 *weisse Kugeln, so würde die Anzahl der dem Ereignisse, eine weisse zu treffen, günstigen Fälle der Zahl der überhaupt möglichen gleich sein, d. h. es wäre dann* $n = N = 10$, *also*

$$W = \frac{10}{10} = 1.$$

Nach den Begriffen des gemeinen Lebens ist es im Falle *a*) wahrscheinlich eine weisse und unwahrscheinlich eine rothe Kugel zu ziehen, im Falle *b*) zweifelhaft eine weisse oder eine rothe zu ziehen, im Falle *c*) gewiss, dass man eine weisse ziehen wird. Mit diesen Begriffen in Uebereinstimmung, sagt man ein Ereigniss sei

unwahrscheinlich, wenn $W < \frac{1}{2}$
zweifelhaft, wenn $W = \frac{1}{2}$
wahrscheinlich, wenn $W > \frac{1}{2}$
und gewiss, wenn $W = 1$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss nicht eintreffen werde, nennt man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Sie ergänzt, wie aus dem Vorigen klar geworden ist, die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens zur Gewissheit. — Bezeichnet W die letztere und W' die erstere, so ist

$$W' = 1 - W,$$

oder wenn

$$W = \frac{n}{N}$$

ist, so hat man

$$W' = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N - n}{N}.$$

§. 39.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens irgend eines unter mehren Ereignissen, aus den Wahrscheinlichkeiten sämmtlicher.

Es sei zunächst

$$W_1 = \frac{n_1}{N_1}$$

die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Ereignisses und

$$W_2 = \frac{n_2}{N_2}$$

die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines anderen, und es werde nach der Wahrscheinlichkeit W gefragt, dass irgend eines von beiden Ereignissen eintreffen werde, so bildet das Zusammentreffen jedes von den n_1 günstigen Fällen beim ersten Ereignisse mit einem der N_2 überhaupt möglichen Fälle beim zweiten Ereignisse einen für die Wahrscheinlichkeit W günstigen Fall. Dies giebt demnach $n_1 . N_2$ günstige Fälle. In gleicher Weise bildet aber auch das Zusammentreffen jedes der n_2 günstigen Fälle beim zweiten Ereignisse mit einem der N_1 überhaupt möglichen Fälle beim ersten Ereignisse wieder einen der Wahrscheinlichkeit W günstigen Fall, so dass zu den vorigen günstigen Fällen noch $n_2 . N_1$ Fälle hinzukommen und in Summa also $n_1 . N_2 + n_2 . N_1$ günstige Fälle vorhanden sind. Es bleibt nun noch die Bestimmung der Anzahl aller möglichen Fälle übrig. Diese Anzahl ist aber offenbar $N_1 . N_2$, weil das Zusammentreffen jedes möglichen Falles des einen Ereignisses mit jedem möglichen Falle des zweiten einen überhaupt möglichen Fall in Bezug auf das Eintreffen irgend eines von beiden Ereignissen bildet. Somit ist denn die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{n_1 N_2 + n_2 N_1}{N_1 N_2}$$

$$= \frac{n_1 N_2}{N_1 N_2} + \frac{n_2 N_1}{N_1 N_2}$$

$$= \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2}$$

$$= W_1 + W_2.$$

Tritt zu dem Ereignisse, dessen Wahrscheinlichkeit W wir so eben bestimmt haben, noch ein drittes Ereigniss mit der Wahrscheinlichkeit W_3, so ist ganz aus denselben Gründen, wie vorher, die Wahrscheinlichkeit, dass eins von allen drei Ereignissen eintreffen werde

$$W + W_3 = W_1 + W_2 + W_3,$$

wir haben also, wenn wir jetzt W als die Wahrscheinlichkeit betrachten, dass eins von den drei Ereignissen eintreffen werde,

$$W = W_1 + W_2 + W_3.$$

Schliessen wir auf diese Weise weiter, so gelangen wir zu dem allgemeinen Satze:

Sind W_1, W_2, W_3, W_4, ... die Wahrscheinlichkeiten für ebensoviel Ereignisse und bezeichnet W die Wahrscheinlichkeit, dass eins von denselben eintreffen werde, so ist

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \ldots$$

59. Beispiele.

a) Befinden sich in einem Gefässe 7 weisse, 3 rothe, 5 blaue und 10 grüne, in Summa also 25 Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit eine weisse zu ziehen

$$W_1 = \frac{7}{25},$$

eine rothe zu ziehen

$$W_2 = \frac{3}{25},$$

eine blaue zu ziehen

$$W_3 = \frac{5}{25}$$

und endlich eine grüne zu ziehen

$$W_4 = \frac{10}{25} .$$

b) Fragen wir jetzt nach der Wahrscheinlichkeit W, dass eine herausgenommene Kugel eine weisse, rothe oder blaue sein werde, so ist

$$W = \frac{7}{25} + \frac{3}{25} + \frac{5}{25}$$

$$= \frac{15}{25} = \frac{3}{5} .$$

§. 40.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens mehrer Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten der letzteren.

Sei wieder zunächst für zwei Ereignisse

$$W_1 = \frac{n_1}{N_1}$$

$$\text{und } W_2 = \frac{n_2}{N_2} ,$$

so bildet hier nur das Zusammentreffen eines der n_1 günstigen Fälle des ersten Ereignisses mit einem der n_2 günstigen Fälle des zweiten Ereignisses im Allgemeinen einen günstigen Fall für das gleichzeitige Eintreffen beider Ereignisse. Die Zahl der überhaupt günstigen Fälle ist demnach $n_1 . n_2$. Die der überhaupt möglichen, wie vorher, $N_1 . N_2$, folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{n_1 n_2}{N_1 N_2} = W_1 W_2 .$$

Ganz in derselben Weise, wie vorher, wird man für mehre Ereignisse erhalten

$$W = W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots ,$$

so dass wir hier zu folgender allgemeinen Regel gelangen:

Sind W_1, W_2, W_3, W_4, ... die Wahrscheinlichkeiten für ebensoviel Ereignisse und bezeichnet W die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens sämmtlicher Ereignisse, so ist

$$W = W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$$

Es folgt von selbst aus dem Bisherigen, dass die vorige Regel auch noch anwendbar bleibt, wenn nach der Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens einzelner von mehren Ereignissen bei gleichzeitigem Nichteintreffen der übrigen gefragt wird. Sind z. B. W_1, W_2, W_3, W_4... die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens von 5 einzelnen Ereignissen und es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass das 1ste und 3te eintreffen, das 2te und 4te aber nicht eintreffen werde, so ist

W_1 die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des ersten Ereignisses,

$1-W_2$ die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens des zweiten Ereignisses,

W_3 die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des 3ten Ereignisses und

$1-W_4$ die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens des vierten Ereignisses; mithin ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 1ste und 3te eintreffen, das 2te und 4te hingegen nicht eintreffen werde

$$W = W_1 (1-W_2) W_3 (1-W_4).$$

Stellen wir uns zunächst für zwei Ereignisse *A* und *B* die möglichen Combinationen zusammen, so ist

$W_1 W_2$ die Wahrscheinlichkeit, dass *A* und *B* zugleich eintreffen,

$(1-W_1) W_2$ die Wahrscheinlichkeit, dass *A* nicht, wohl aber *B* eintreffe,

$W_1 (1-W_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass *A* eintreffe, *B* aber nicht,

$(1-W_1)(1-W_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass weder *A* noch *B* eintreffe,

$1-(1-W_1)(1-W_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass von *A* und *B* wenigstens eins eintreffe.

Hieraus ergiebt sich leicht der Schluss auf mehr als zwei Ereignisse.

§. 41.

Die mathematische Hoffnung oder die Erwartung.

Handelt es sich um den Werth G eines in Aussicht stehenden, aber noch ungewissen Gewinnes im Betrage S, so hängt derselbe offenbar von der Höhe des Gewinnes und ferner von der Grösse der Wahrscheinlichkeit W des Gewinnens ab. Der Werth wird offenbar der ebensovielste Theil von der zu gewinnenden Summe sein, als die Wahrscheinlichkeit von der Gewissheit 1 ist.

$$\text{Nun ist } W = \frac{n}{N} = \frac{n}{N} \cdot 1, \text{ folglich auch}$$

$$G = \frac{n}{N} \cdot S \text{ oder}$$

$$= WS.$$

Das Produkt WS wird die mathematische Hoffnung oder die Erwartung genannt.

Um ein Beispiel dafür anzuführen, wollen wir uns folgende Frage vorlegen:

60. Beispiel.

Wenn bei einem Würfelspiele mit 2 Würfeln auf jedem Wurfe, welcher ein Pasch ist, ein Gewinn von 2 Rt. stünde, auf jedem anderen Wurfe aber nichts, wie viel könnte dann der Spielende Einsatz geben?

Untersuchen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit einen Pasch zu werfen, so ist die Zahl der günstigen Fälle offenbar gleich 6, denn es sind nur zwei Einsen, zwei Zweien, u. s. f. bis zwei Sechsen möglich. Die Zahl aller möglichen Fälle erhält man hingegen leicht durch die Betrachtung, dass jede Zahl des einen Würfels mit jeder des anderen einen möglichen Fall giebt, was im Ganzen $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Fälle ausmacht. Hiernach wäre also

$$W = \frac{6}{36} = \frac{1}{12}$$

$$S = 2 \text{ Thaler},$$

$$\text{folglich } G = WS = \frac{1}{12} \cdot 2 \text{ Thlr.} = \frac{1}{6} \text{ Thlr.}$$

$$= 5 \text{ Sgr.}$$

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf Sterblichkeit und Lebensdauer.

§. 42.

Vorbemerkungen über Sterblichkeit.

Durch die, viele Jahre hindurch fortgesetzte, Vergleichung der Sterbelisten verschiedener Orte ist man endlich zu Tabellen gelangt, in welchen sich angegeben findet, wie viele von einer gewissen Anzahl gleichzeitig geborner Personen in dem und dem Alter noch leben. Wir haben am Schlusse in Tafel V. zwei solche Tabellen mitgetheilt, die *Süssmilch-Baumann*'sche, welche namentlich für Nord-Deutschland als allgemeine Sterblichkeits-Tabelle benutzt werden kann, und die *Deparcieux*'sche, welche nach französischen Tontinen (Rentenanstalten) zusammengestellt ist und deshalb namentlich bei solchen Personen benutzt werden kann, die ohne Nahrungssorgen und ohne grosse körperliche Anstrengung ihr Leben verbringen.

§. 43.

Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Alter zu erreichen.

Wir wollen in der Folge durch a_n die Anzahl derjenigen Personen bezeichnen, die von einer gewissen, in der angenommenen Sterblichkeitstafel angegebenen, Anzahl gleichzeitig Geborner in einem Alter von n Jahren noch leben. So wäre nach der Süssmilch-Baumann'schen Tafel

$$a_0 = 1000,\ a_5 = 579,\ a_{50} = 300,\ \text{etc.}$$

nach Deparcieux hingegen

$$a_0 = 10000,\ a_5 = 6468,\ a_{50} = 3964,\ \text{etc.}$$

Fragen wir jetzt nach der Wahrscheinlichkeit, mit welcher eine Person von n Jahren das $(n+p)$te Lebensjahr erreichen werde, so haben wir in einer Sterblichkeitstafel nachzusehen, wie viele von a_n im $n$ten Lebensjahre stehenden Personen das $(n+p)$te Lebensjahr erreichen. Ist nun die Anzahl a_{n+p}, so ist a_{n+p} die Anzahl der günstigen Fälle, weil die in Rede stehende Person offenbar noch leben wird, wenn sie eine von den a_{n+p} Personen ist, hingegen ist a_n die Anzahl aller möglichen Fälle, so dass mithin

$$W = \frac{a_{n+p}}{a_n}$$

die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine Person von n Jahren das $(n+p)$te Lebensjahr erreicht. Offenbar ist

$$W' = 1 - \frac{a_{n+p}}{a_n}$$

die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die in Rede stehende Person das $(n+p)$te Lebensjahr nicht erreichen werde.

61. Beispiele.

a) Fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, mit welcher eine 36jährige Person noch 30 Jahre leben, d. h. das 66ste Lebensjahr erreichen werde, so finden wir in der Süssmilch-Baumann'schen Tafel

$$a_{36} = 402 \text{ und } a_{66} = 152,$$

mithin

$$W = \frac{152}{402} = 0{,}378\ldots$$

Da hier $W < \frac{1}{2}$ ist, so ist also die Erreichung dieses Alters unwahrscheinlich.

b) Wird für dieselbe Person die Wahrscheinlichkeit gesucht, mit welcher sie das 61. *Lebensjahr erreichen werde, so ist*

$$a_{36} = 402,\ a_{61} = 201,$$

$$folglich \quad W = \frac{201}{402} = \tfrac{1}{2}.$$

Da hier die Wahrscheinlichkeit gerade gleich $\frac{1}{2}$ ist, so ist es zweifelhaft, ob die Person das 61ste Jahr erreichen werde oder nicht.

c) Wird endlich für dieselbe Person die Wahrscheinlichkeit gesucht, mit welcher sie das 50ste Jahr erreichen werde, so hat man $a_{50} = 300$, *folglich*

$$W = \frac{300}{402} = 0{,}746.$$

Da $0{,}746 > \frac{1}{2}$, so ist es wahrscheinlich, dass die Person dieses Alter erreichen werde.

§. 44.

Wahrscheinliche Lebensdauer.

Unter der wahrscheinlichen Lebensdauer einer Person versteht man diejenige Anzahl von Jahren, nach deren Verfluss die Wahrscheinlichkeit noch zu leben der Wahrscheinlichkeit zu sterben, d. i. also der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich ist. Bezeichnen wir diese Anzahl Jahre für eine Person von n Jahren mit x, so ist die Wahrscheinlichkeit, nach x Jahren noch zu leben

$$\frac{a_{n+x}}{a_n}$$

und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{a_{n+x}}{a_n},$$

setzen wir beide Wahrscheinlichkeiten einander gleich, so erhalten wir

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} = 1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}$$

$$a_{n+x} = a_n - a_{n+x},$$

$$2a_{n+x} = a_n$$

$$a_{n+x} = \tfrac{1}{2}\, a_n.$$

Um demnach die wahrscheinliche Lebensdauer einer Person mittelst der Sterblichkeitstafeln zu finden, suche man die An-

zahl der im *n*ten Lebensjahre noch Lebenden, nehme davon die Hälfte und suche das Lebensjahr auf, in welchem die Anzahl der noch Lebenden jener Hälfte gleich ist. Die dabei stehenden Jahre geben dann das Alter an, bis zu welchem die Person noch zu leben hoffen darf. Gemeiniglich wird sich die vorerwähnte halbe Anzahl der im *n*ten Jahre Lebenden in der angewandten Sterblichkeitstafel nicht finden, sondern zwischen zwei auf einander folgende Zahlen fallen. In diesem Falle liegt die Grenze des wahrscheinlichen Lebensalters zwischen den zu den einschliessenden Zahlen gehörigen Jahren. Zur genaueren Bestimmung derselben muss der Weg der sogenannten Interpolation eingeschlagen werden. Wir wählen für beide Fälle ein Beispiel.

62. Beispiel.

Welches ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer 36*jährigen Person mit Rücksicht auf die Süssmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel?*

Es ist (Tafel V.)

$$a_{36} = 402,$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}\, a_{36} = 201.$$

Suchen wir 201 unter der Zahl der Lebenden, so finden wir diese Zahl bei dem Alter von 61 Jahren. Es ist also das 61ste Jahr die Grenze der wahrscheinlichen Lebensdauer.

63. Beispiel.

Welches ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer 38*jährigen Person mit Rücksicht auf die Süssmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel?*

Wir haben hier

$$a_{38} = 388,$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}\, a_{38} = 194.$$

Suchen wir 194 unter der Zahl der Lebenden (Tafel V.), so finden wir die einschliessenden Zahlen 192 und 201. Es geht hieraus hervor, dass die Grenze der wahrscheinlichen Lebensdauer zwischen dem 61sten und 62sten Lebensjahre

liegt. — Zur genaueren Bestimmung derselben führt folgende Betrachtung. Bis zu der von uns gesuchten Zeit, wo also von 1000 gleichzeitig Gebornen noch 194 leben, sind vom 61. Jahre ab, wo nach der Tafel noch 201 lebten, $201 - 194 = 7$ Personen gestorben. Auf das ganze Jahr (vom 61sten bis 62sten Jahre) kommen in Summa 9 Todte, es bleibt uns also nur übrig, zu ermitteln, in welchem Zeitraume nach diesem Maafsstabe 7 Personen sterben werden. Diesen Zeitraum finden wir nach dem Regeldetri-Exempel:

9 Personen : 3 Personen = 1 Jahr : x Jahren,

woraus man findet

$$x = \frac{7}{9}.$$

Die gesuchte wahrscheinliche Lebensdauer ist demnach $61\frac{7}{9}$ Jahre.

Verschieden von der wahrscheinlichen Lebensdauer ist die

§. 45.

Mittlere Lebensdauer.

Wenn von einer gewissen Anzahl gleichzeitig geborner Personen im nten Lebensjahre noch a_n,
im $(n+1)$ten Lebensjahre noch a_{n+1},
„ $(n+2)$ten „ „ „ a_{n+2},
„ $(n+3)$ten „ „ „ a_{n+3},
u. s. f.

leben, so ist die Anzahl Jahre, welche diese a_n Person in Summa durchleben

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots \text{ *)}$$

Es haben nämlich von a_n Personen a_{n+1} das $(n+1)$te Jahr durchlebt, also jeder 1 Jahr, macht in Summa a_{n+1} Jahre; ferner haben a_{n+2} Personen ein weiteres Jahr durchlebt, mithin alle zusammen a_{n+2} Jahre u. s. f. Um nun zu finden, wie viele von diesen durchlebten Jahren durchschnittlich auf eine der a_n Personen kommen, so haben wir nur mit a_n in die obige Summe zu dividiren, wodurch wir erhalten

*) Die Reihe bricht natürlich mit der Sterblichkeitstafel ab.

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots}{a_n} .$$

Es ist im Bisherigen noch stillschweigend eine Annahme gemacht worden, die füglich nicht gemacht werden darf. — Wenn wir nämlich sagten, von a_n Personen lebten noch a_{n+1} Personen ein weiteres Jahr, so ist das wohl richtig, allein von den inzwischen verstorbenen sind doch auch noch Theile eines Jahres verlebt worden, weil ja nicht alle zu Anfange des $(n+1)$sten Lebensjahres gestorben sein werden. Man wird am wenigsten irren, wenn man annimmt, dass alle mit Tode abgehenden Personen in der Mitte des Jahres sterben. Bei dieser Annahme wird also noch $\frac{1}{2}$ Jahr als weitere Lebensdauer zuzurechnen sein. Fügen wir deshalb dem obigen Quotienten noch $\frac{1}{2}$ hinzu, so erhalten wir

$$M = \frac{1}{2} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots}{a_n} .$$

Dieser Ausdruck heisst die (fernere) mittlere Lebensdauer einer Person von *n* Jahren.

64. Beispiel.

Welches ist die mittlere Lebensdauer einer Person von 84 *Jahren nach der Süssmilch-Baumann'schen Sterblichkeitstafel?*

Es ist $a_{84} = 20$, $a_{85} = 17$, $a_{86} = 14$ u. s. f. (s. Taf. V.) folglich ist

$$M = \frac{1}{2} + \frac{17+14+12+10+8+6+5+4+3+2+1}{20}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{82}{20} = \frac{1}{2} + \frac{41}{10} = 4{,}6.$$

Die mittlere Lebensdauer ist also noch 4,6 Jahre.

§. 46.

Ehedauer.

Ist bei einem Ehepaare der Mann *n*, die Frau *p* Jahre alt, so ist mit Rücksicht auf die frühere Bezeichnung, die Wahrscheinlichkeit, dass beide nach *k* Jahren noch leben werden (vergl. §. 40.)

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+k}}{a_p} \ldots \text{(a)},$$

dass beide zugleich nicht mehr leben werden

$$1 - \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+k}}{a_p} \ldots \text{(b)},$$

dass der Mann noch leben, die Frau aber gestorben sein werde

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \left(1 - \frac{a_{p+k}}{a_p}\right) \ldots \text{(c)},$$

dass der Mann gestorben sein, die Frau aber noch leben werde

$$\left(1 - \frac{a_{n+k}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{p+k}}{a_p} \ldots \text{(d)},$$

dass beide gestorben sein werden

$$\left(1 - \frac{a_{n+k}}{a_n}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_{p+k}}{a_p}\right) \ldots \text{(e)},$$

endlich dass noch nicht beide gestorben sein werden

$$1 - \left(1 + \frac{a_{n+k}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+k}}{a_p}\right) \ldots \text{(f)}.$$

65. Beispiel.

Anwendung des Vorigen auf ein Ehepaar, bei welchem der Mann 36, *die Frau* 29 *Jahre alt ist, für die folgenden* 20 *Lebensjahre.*

Es ist hier $n = 36$, $p = 29$, $k = 20$, und mithin nach der Süssmilch-Baumann'schen Tafel

$a_{36} = 402$, $a_{29} = 445$, $a_{36+20} = a_{56} = 246$ und $a_{29+20} = a_{49} = 308$,

folglich

a) $\frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+k}}{a_p} = \frac{246}{402} \cdot \frac{308}{445} = 0{,}423 \ldots$

Da $0{,}423 < \frac{1}{2}$ ist, so ist es unwahrscheinlich, dass beide Personen nach 20 Jahren noch leben werden.

b) Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des Vorigen ist

$$1 - 0{,}423 = 0{,}577 \ldots$$

Es ist also wahrscheinlich, dass beide zugleich nicht mehr leben werden.

c) $\frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \left(1 - \frac{a_{p+k}}{a_p}\right) = \frac{246}{402} \cdot \left(1 - \frac{308}{445}\right)$

$$= \frac{246}{402} \cdot \frac{137}{308} = 0{,}188\ldots$$

Dass der Mann noch leben, die Frau aber gestorben sein werde, ist ebenfalls unwahrscheinlich.

d) $\left(1 - \frac{a_{n+k}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{p+k}}{a_p} = \left(1 - \frac{246}{402}\right) \cdot \frac{308}{445}$

$$= \frac{156}{402} \cdot \frac{308}{445} = 0{,}269.$$

Dass der Mann gestorben sein, die Frau aber noch leben werde, ist ebenfalls unwahrscheinlich.

e) $\left(1 + \frac{a_{n+k}}{a_n}\right) \cdot \left(1 + \frac{a_{p+k}}{a_p}\right) = \frac{156}{402} \cdot \frac{137}{308}$

$$= 0{,}1199\ldots$$

Dass keins mehr leben werde, ist ebenfalls unwahrscheinlich.

f) Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit vom Vorigen ist

$$1 - 0{,}1199 = 0{,}8801.$$

Es ist mithin wahrscheinlich, dass noch nicht beide gestorben sein werden, d. h. dass eine von beiden Personen noch leben werde.

§. 47.

Wahrscheinliche Ehedauer.

Unter der wahrscheinlichen Ehedauer versteht man den Zeitraum, nach dessen Verfluss die Wahrscheinlichkeit, dass die Ehe noch bestehen und die Wahrscheinlichkeit, dass sie aufgelöst sein werde, einander gleich sind.

Setzen wir diesen Zeitraum = x Jahre, so ist bei voriger Bezeichnung

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass beide nach x Jahren noch leben werden, hingegen

$$1 - \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass nicht beide zugleich noch leben werden. Sind beide Wahrscheinlichkeiten gleich, so haben wir

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p} = 1 - \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p}$$

$$2 \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p} = 1$$

$$a_{n+x} \cdot a_{p+x} \cdot = \tfrac{1}{2} \cdot a_n a_p.$$

Man wird deshalb um x zu finden für dasselbe 1, 2, 3 u. s. f. zu nehmen haben, bis man auf eine Zahl kommt, für welche die vorige Gleichung richtig ist.

66. Beispiel.

Welches ist die wahrscheinliche Ehedauer, wenn der Mann 36 *und die Frau* 29 *Jahre alt ist mit Benutzung der Süssmilch-Baumann'schen Tafel?*

Wir haben zunächst

$$\tfrac{1}{2}\, a_n \cdot a_p = \tfrac{1}{2} \cdot a_{36} \cdot a_{29} = \tfrac{1}{2} \cdot 402 \cdot 445 = 89445 = A.$$

Gehen wir gleich 10 Jahre weiter, d. h. setzen $x = 10$, so ist

$$a_{n+x} \cdot a_{p+x} = a_{46} \cdot a_{39} = 332 \cdot 374 = 124168.$$

Da diese Zahl noch grösser als *A* ist, so müssen wir noch weiter gehen. Setzen wir deshalb etwa $x = 17$, so haben wir

$$a_{n+x} \cdot a_{p+x} = a_{53} \cdot a_{46} = 273 \cdot 332 = 90636.$$

Auch diese Zahl ist noch grösser als A. Gehen wir noch 1 Jahr weiter, setzen also $x = 18$, so ist

$$a_{n+x} \cdot a_{n+p} = a_{54} \cdot a_{47} = 264 \cdot 324 = 75536.$$

Da diese Zahl kleiner als *A* ist, so haben wir die Grenze erreicht. Die wahrscheinliche Ehedauer liegt also zwischen 17 und 18 Jahren. Das was zu 17 Jahren noch hinzukommt, finden wir ganz so, wie im 63. Beispiele, durch die Proportion

$$90636 - 75536 : 90636 - 89545 = 1 : z$$

$$15100 : 1091 = 1 : z$$

$$z = \frac{1091}{15100} = 0{,}072.$$

Dieser Werth von z kommt noch zu 17 hinzu, so dass die wahrscheinliche Ehedauer vollständig ausgedrückt wird durch

$$x = 17{,}072\ldots$$

§. 48.

Mittlere Ehedauer.

Die mittlere Ehedauer unterscheidet sich von der wahrscheinlichen ebenso, wie die mittlere Lebensdauer von der wahrscheinlichen. Mit Bezug auf das was unter §. 45. ausgeführt worden ist, dürfte jetzt wohl von selbst klar sein, dass die mittlere Ehedauer ausgedrückt wird durch

$$M = \tfrac{1}{2} + \frac{a_{n+1} \cdot a_{p+1} + a_{n+2} \cdot a_{p+2} + a_{n+3} \cdot a_{p+3} + \ldots}{a_n \; a_p} .$$

67. Beispiel.

Welches ist die mittlere Ehedauer, wenn der Mann 82 *und die Frau* 79 *Jahre alt ist, nach der Süssmilch-Baumann'schen Sterblichkeitstafel?*

Es ist $a_{82} = 28$ $a_{79} = 43$

$a_{83} = 24$ $a_{80} = 37$

$a_{84} = 20$ $a_{81} = 32$

u. s. f. u. s. f. (s. Taf. V.),

folglich

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{28.43}(24.37 + 20.32 + 17.28 + 14.24 + 12.20 + 10.17 + 8.14 + 6.12 + 5.10 + 4.8 + 3.6 + 2.5 + 1.4)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3048}{1204} = 0{,}5 + 2{,}53$$

$$= 3{,}03\ldots$$

Die mittlere Ehedauer beträgt also 3,03... Jahre.

Achtes Kapitel.

Versicherungs-Rechnungen mit Rücksicht auf Sterblichkeit.

§. 49.

Aussteuerversicherung bei Zahlung der Prämie in einer Summe.

Bei vielen Lebensversicherungsinstituten besteht auch eine Aussteuerversicherung in der Art, dass entweder gegen eine einmal zu zahlende Summe oder gegen jährlich zu zahlende feste Prämien einem Kinde gewöhnlich nach Erreichung des 18ten, 21sten oder 24sten Lebensjahres ein Kapital ausgezahlt wird. In den Statuten der Versicherungsanstalten sind in der Regel die Prämien angegeben, welche einer Versicherungssumme von 100 Thlr. entsprechen. Wir betrachten zunächst die Versicherung bei einmaliger Prämienzahlung. Obgleich die Versicherung den Kindern aus allen Ständen offen steht, so werden thatsächlich doch nur Kinder aus den wohlhabenderen versichert werden, deshalb ist auch die Deparcieux'sche Sterblichkeitstafel in Anwendung zu bringen. — Die Berechnung der Prämie ist leicht und einfach. Ist S die versicherte Summe, die bei Erreichung des $n$ten Lebensjahres gezahlt wird und ist ein Kind jetzt k Jahre alt, so ist nach der früheren Bezeichnung die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind das $n$te Jahr erreichen werde

$$\frac{a_n}{a_k}$$

und es hat deshalb die mathematische Hoffnung auf die Versicherungssumme den Werth (s. §. 41.)

$\frac{a_n}{a_k}$. S.

Da die Versicherungssumme aber erst nach (n—k) Jahren zahlbar ist, so ist ihr baarer Werth (vergl. §. 3.)

$$W = \frac{a_n}{a_k} \cdot \frac{S}{e^{n-k}} \quad \ldots \text{ (A.)},$$

wo wie früher $\frac{p+100}{100} = e$ gesetzt ist.

Was nun noch den zu Grunde zu legenden Zinsfuss betrifft, so wird man über $3\frac{1}{2}\,\%$ deshalb nicht hinausgehen dürfen, weil auch bei Anwendung der Deparcieux'schen Sterblichkeitstabelle für die Versicherungsinstitute ein Verlust daraus erwächst, dass auch die wohlhabenderen Stände nur ihre zur Zeit der Versicherung gesunden Kinder versichern werden und deshalb die Gesellschaft sich durch etwas höhere Prämien decken muss.

68. Beispiele.

Welche Prämie ist für ein Kind bei der Geburt zu zahlen, wenn demselben 100 *Thlr. zahlbar nach erreichtem* 18. *Lebensjahre gesichert werden sollen?*

Wir haben hier in der Formel

$$W = \frac{a_n}{a_k} \cdot \frac{S}{e^{n-k}}$$

$n = 18$, $k = 0$, $S = 100$, $e = 1{,}035$ und nach Deparcieux $a_{18} = 5655$, $a_0 = 10000$, folglich

$$W = \frac{5655}{10000} \cdot \frac{100}{1{,}035^{18}}.$$

Da nach Taf. II.

$$\frac{1}{1{,}035^{18}} = 0{,}5383611$$

ist, so erhalten wir

$$W = \frac{5655}{1000} \cdot 53{,}83611$$
$$= 30{,}44..$$
$$= 30 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr. } 3 \text{ Pf.}$$

69. Beispiel.

Welche Prämie ist für ein Kind, das 7 Jahre alt ist, zu zahlen, wenn demselben 100 *Thlr. zahlbar nach erreichtem* 21*sten Lebensjahre gesichert werden sollen?*

Wir haben hier in der Formel

$$W = \frac{a_n}{a_k} \frac{S}{e^{n-k}}$$

$n = 21,\ k = 7,\ a_n = 5344,\ a_k = 6243,\ S = 100,\ e = 1{,}035,$

folglich

$$W = \frac{5344}{6243} \cdot \frac{100}{1{,}035^{14}}$$

$$= \frac{5344\ .\ 61{,}77818}{6243}$$

$$= 52{,}882\ .\ .$$

$$= 52 \text{ Thlr. } 26 \text{ Sgr. } 9 \text{ Pf.}$$

In der nachfolgenden Tabelle stellen wir die nach der angegebenen Weise berechneten Prämien zusammen, welche bei der Geburt, im ersten u. s. f. bis zum 12. Jahre behufs einer Versicherung von 100 Thlr. zahlbar im 18ten, 21sten und 24sten Lebensjahre einmal zu zahlen sind.

Einmal zu zahlende Prämie zur Versicherung von 100 *Thalern zahlbar bei Vollendung des* 18*ten,* 21*sten und* 24*sten Lebensjahres.*

Alter des Kindes.	Bei Vollendung des 18. Jahres.	Bei Vollendung des 21. Jahres.	Bei Vollendung des 24. Jahres.
Jahre.	Thaler.	Thaler.	Thaler.
Geburt.	30,44	26,74	23,41
1	42,30	37,15	32,52
2	46,02	40,41	35,38
3	49,47	43,44	38,03
4	52,79	46,36	40,58
5	55,90	49,09	42,98
6	58,98	51,79	45,35
7	62,03	54,49	47,70
8	65,14	57,21	50,08
9	68,32	60,00	52,52
10	71,52	62,80	54,99
11	74,75	65,64	57,47
12	78,02	68,51	59,97

Anmerkung. Zu den in vorhergehender Tabelle aufgestellten Beiträgen wird allerdings noch ein kleiner Aufschlag zur Deckung der Verwaltungskosten kommen müssen. Uebrigens würde schon bei obigen Prämien den Versicherungsinstituten ein Gewinn erwachsen, weil angenommen worden ist, dass dieselben ihre Gelder nur zu 3½ % unterbringen könnten. Wie verschieden die Sätze bei den verschiedenen Instituten sind, und wie wenig sie deshalb auf mathematischen Grundlagen zum Theil zu ruhen scheinen, zeigt nachfolgende vergleichende Tabelle.

Einmalige Prämie zur Versicherung von 100 *Thlr. zahlbar bei Vollendung*

A. des 18. Lebensjahres.

Alter des Kindes.	Janus in Hamburg.	Medical etc. Assurance Society.	Deutsche Lebensversicherungs-Gesellschaft in Lübeck.
Jahre.	Rt. Sgr. ₰.	Rt. Sgr. ₰.	Rt. Sgr.
Geburt.	33. 8. 3.	— — —	36. 17.
1	40. 21. 3.	43. 1. 9.	44. 15.
2	45. 25. 3.	49. 14. 4.	49. 25.
3	50. 26. 6.	54. 15. —	54. 27.

B. des 21. Lebensjahres.

Alter des Kindes.	Janus in Hamburg.	Crown Life Assurance Company.	Medical etc. Assurance Society.	Lübecker Gesellschaft.
Jahre.	Rt. Sgr. ₰.	Rt. Sgr. ₰.	Rt. Sgr. ₰.	Rt. Sgr.
Geburt.	29. 11. 6.	— — —	— — —	32. 26.
1	35. 28. 3.	36. 22. 6.	39. 17. 2.	40. —
2	40. 13. 6.	43. 7. 6.	44. 21. 7.	44. 25.
3	44. 28. —	47. 19. —	48. 21. 4.	49. 11.

§. 50.

Rückgewährung der Versicherungsprämie.

Soll eine Versicherungsanstalt im Stande sein, die einmal gezahlte Versicherungsprämie im Falle des früheren Ablebens des Kindes wieder zurückzuerstatten, so muss sie natürlich eine Zusatzprämie nehmen. Es sind hier nun überhaupt 4 Fälle möglich:

Die Versicherungsprämien allein werden zurückerstattet

1) am Ende des Todesjahres,
2) zur Zeit, wo die Versicherungssumme fällig sein würde; und ferner die Versicherungsprämien sammt den Zusatzprämien werden zurückerstattet
3) am Ende des Todesjahres,
4) zum festgesetzten Versicherungstermine.

Nach unserer Ansicht dürften die Versicherungsarten unter 2) und 4) die empfehlenswerthesten sein, weil ja bei diesen auch die Prämien gegen einen Disconto-Abzug sofort beim Tode zurückerstattet werden können. Wir werden uns auch deshalb vorzugsweise mit diesen beschäftigen.

Soll die Versicherungsprämie allein zum Versicherungstermine zurückgezahlt werden, so hängt diese Zahlung ab von der Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte vor dem Versicherungstermine gestorben ist; im Uebrigen ist die Rechnung ganz wie vorher. Bezeichnen wir nämlich die Versicherungsprämie mit V und die Zusatzprämie mit Z, behalten aber im Uebrigen die Bezeichnungen aus §. 49. bei, so haben wir

$$Z = \left(1 - \frac{a_n}{a_k}\right) \cdot \frac{V}{e^{n-k}} \quad \ldots \text{(B)}.$$

Da eine Lebensversicherungsbank für alle Eventualitäten möglichst gedeckt sein muss, so kann bei Berechnung der Zusatzprämien nicht die Sterblichkeitstafel von Deparcieux, sondern es muss die allgemeine Süssmilch-Baumannsche angewendet werden, denn es bleibt immer möglich, dass auch Leute aus niederen Ständen ihre Kinder versichern und dass dann wegen der grösseren Sterblichkeit der letzteren mehr Prämien zurückerstattet werden müssten, als bei der Berechnung der Zusatzprämien vorgesehen wären.

70. Beispiel.

Welche Zusatzprämie muss der Janus nehmen, wenn er die bei der Geburt eines Kindes behufs einer Versicherung von 100 *Thlr. zahlbar im erreichten* 18. *Lebensjahre gezahlte Prämie von* 33 *Thlr.* 8 *Sgr.* 3 *Pf. zurückzahlen können soll?*

In der Formel

$$Z = \left(1 - \frac{a_n}{a_k}\right) \frac{V}{e^{n-k}}$$

ist $V = 33{,}27$, $n = 18$, $k = 0$, $a_n = 499$, $a_k = 1000$, $e = 1{,}035$, folglich

$$Z = \left(1 - \frac{499}{1000}\right) \cdot \frac{33{,}27}{1{,}035^{18}}$$

$$= \frac{501 \,.\, 33{,}27 \,.\, 0{,}5383611}{1000}$$

$$= 8{,}97$$

$$= 8 \text{ Thlr. } 29 \text{ Sgr. } 2 \text{ Pf.}$$

71. Beispiel.

Welche Zusatzprämie ist erforderlich, damit die im 5ten Lebensjahre gezahlte Prämie im Betrage von 49,09 *Thlr. im* 21*sten Jahre zurückgezahlt werden kann, wenn* 3 % *Zinsen gerechnet werden?*

Es ist hier $V = 49{,}09$, $n = 21$, $k = 5$, $a_n = a_{21} = 486$, $a_k = a_5 = 579$, $e = 1{,}03$, folglich

$$Z = \left(1 - \frac{486}{579}\right) \cdot \frac{49{,}09}{1{,}03^{16}}$$

$$= \frac{93 \,.\, 49{,}09 \,.\, 0{,}6231669}{579}$$

$$= 4{,}86 = 4 \text{ Thlr. } 25 \text{ Sgr. } 10 \text{ Pf.}$$

§. 51.

Rückgewährung der Versicherungsprämie und der Zusatzprämie zugleich.

Soll ausser der Versicherungsprämie V auch die Zusatzprämie Z zurückgezahlt werden, so ist der baare Werth von $V + Z$ auszudrücken und es ist deshalb nur in der §. 50. ent-

wickelten Formel $V+Z$ statt V einzusetzen, wodurch wir erhalten

$$Z = \left(1 - \frac{a_n}{a_k}\right) \frac{V+Z}{e^{n-k}} .$$

Um hieraus Z zu bestimmen, haben wir

$$Z = \frac{a_k - a_n}{a_k . e^{n-k}} . V + \frac{a_k - a_n}{a_k . e^{n-k}} - . Z$$

$$\text{oder } Z \left(1 - \frac{a_k - a_n}{a_k . e^{n-k}}\right) = \frac{a_k - a_n}{a_k . e^{n-k}} . V$$

$$\text{oder } Z = \frac{\frac{a_k - a_n}{a_k . e^{n-k}} . V}{1 - \frac{a_k - a_n}{a_k . e^{n-k}}}$$

oder endlich

$$Z = \frac{V}{\frac{a_k . e^{n-k}}{a_k - a_n} - 1} \quad \ldots \quad (C).$$

Dies ist die zur Berechnung bequemste Formel,

72. Beispiel.

Welche Zusatzprämie ist zu nehmen, wenn die Versicherungsprämie im Betrage von 49,09 *Thaler (s.* 71. *Beispiel) sammt der Zusatzprämie im* 21. *Jahre zurückgezahlt werden soll und wenn* 3 % *Zinsen berechnet werden?*

Es ist hier wieder $V = 40{,}09$ u. s. f., also

$$Z = \frac{49{,}09}{\frac{579 . 1{,}03^{16}}{579 - 486} - 1}$$

$$= \frac{49{,}09}{\frac{579 . 1{,}604706}{93} - 1}$$

$$= \frac{49{,}09}{9{,}99 - 1} = \frac{49{,}09}{8{,}99}$$

$$= 5{,}46 \text{ Thlr.} = 5 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr. } 10 \text{ Pf.}$$

Die Gesammtprämie wäre demnach

$$49{,}09 + 5{,}46 = 54{,}55$$
$$= 54 \text{ Thlr. } 16 \text{ Sgr. } 6 \text{ Pf.}$$

Nachfolgende Tabelle enthält die in der angegebenen Art berechneten Gesammtprämien, welche, wenn das Kind vorher stirbt, zur Versicherungszeit zurückgewährt werden können.

Einmalige Prämie zur Versicherung von Hundert Thalern zahlbar im 18*ten,* 21*sten und* 24*sten Lebensjahre, welche, wenn das Kind vor dem Versicherungstermine stirbt, zu diesem Termine zurückgezahlt wird.*

Alter des Kindes.	18tes Lebensjahr.	21stes Lebensjahr.	24stes Lebensjahr.
Jahre.	Thaler.	Thaler.	Thaler.
Geburt.	43,18	36,95	31,66
1	53,50	46,14	40,08
2	54,32	47,60	41,64
3	55,45	49,17	43,61
4	58,97	52,04	45,80
5	61,71	54,55	48,10
6	64,41	57,02	50,36
7	66,94	59,44	52,56
8	69,69	61,91	54,83

Anmerkung. Von der Berechnung von Prämien, die sofort beim Tode des versicherten Kindes zurückgewährt werden, wird später bei den Lebensversicherungen die Rede sein.

§. 52.

Aussteuer-Versicherung durch jährliche Prämienzahlung.

Mit Zugrundelegung der Süssmilch-Baumann'schen Sterblichkeitstafel wollen wir annehmen, dass 1000 Kinder bei der Geburt versichert würden mit je 100 Thlr. zahlbar bei Vollendung des 18. Lebensjahres. Wir untersuchen zu dem

Ende zuvörderst, zu welcher Summe deren Prämien à 1 Rtl. in den Händen der Versicherungsanstalt nach Vollendung des 18. Jahres angewachsen sein werden.

Die erste Einzahlung wird für sämmtliche 1000 Kinder gezahlt, es wachsen deshalb deren Prämien à 1 Thlr. bei 4% in den Händen der Bank an zu $1000 . 1{,}04^{18}$. Das 1ste Lebensjahr erreichen nur 750, folglich wachsen deren Prämien an zu $750 . 1{,}04^{17}$ u. s. f. Die nachfolgende, durch sich selbstverständliche Tabelle umfasst die Gesammtheit der Prämienzahlungen nach ihrem künftigen Werthe.

Alter der Kinder.	Es leben noch Kinder	Deren Prämien à 1 Thlr. wachsen an zu	Ausgerechnet
Jahre.	wie viel?	Thalern?	Thaler.
Geburt.	1000	$1000 . 1{,}04^{18}$	2025,82
1	750	$750 . 1{,}04^{17}$	1401.61
2	661	$661 . 1{,}04^{16}$	1238,04
3	618	$618 . 1{,}04^{15}$	1112,98
4	593	$593 . 1{,}04^{14}$	1026,88
5	579	$579 . 1{,}04^{13}$	964,08
6	567	$567 . 1{,}04^{12}$	907,77
7	556	$556 . 1{,}04^{11}$	855,93
8	547	$547 . 1{,}04^{10}$	809,69
9	539	$539 . 1{,}04^{9}$	767,16
10	532	$532 . 1{,}04^{8}$	728,07
11	527	$527 . 1{,}04^{7}$	693,49
12	523	$523 . 1{,}04^{6}$	661,76
13	519	$519 . 1{,}04^{5}$	631,44
14	515	$515 . 1{,}04^{4}$	602,48
15	511	$511 . 1{,}04^{3}$	574,80
16	507	$507 . 1{,}04^{2}$	548,37
17	503	$503 . 1{,}04$	523,12
			16074,49

Da die Prämien à 1 Thlr. von 1000 bei der Geburt versicherten Kindern zu 16074,49 Thlr. anwachsen, so ist der künftige Werth der von einem Kinde gezahlten Prämien à 1 Thlr. nach 18 Jahren 16,07449 Thlr.

Die Berechnung nach Art der vorigen Tabelle ergiebt folgende in einer Tabelle zusammengestellten Resultate.

Alter der Kinder.	Versicherte Kinder.	Sie bringen durch Zahlung einer jährlichen Prämie à 1 Rc. dem Versicherungsinstitute ein		
Jahre.	Anzahl.	nach 18 Jahren. Thaler.	nach 21 Jahren. Thaler.	nach 24 Jahren. Thaler.
Geburt.	1000	16074,49	19311,00	23284,27
1	750	13712,67	17032,23	20720,95
2	661	12311,06	15455,54	18947,39
3	618	11073,02	14062,98	17380,59
4	593	9960,04	12811,03	15972,68
5	579	8933,16	11655,93	14673,35
6	567	7969,08	10550,85	13430,29
7	556	7396,31	9927,85	12728,74
8	547	6540,38	8964,38	11645,72
9	539	5730,69	8053,58	10621,20
10	532	4963,53	7190,63	9650,50
11	527	4235,46	6371,66	8712,78
12	523	3541,97	5591,57	7851,77

Fragen wir nun:

73. Beispiel.

Welche Prämie ist für ein einzelnes Kind vom Tage der Geburt an zu entrichten, wenn demselben im 18*ten Lebensjahre eine Summe von* 100 *Thalern ausgezahlt werden soll?*

so lehrt uns das Resultat voriger Tabelle, dass, wenn von 1000 gleichzeitig versicherten Kindern jedes 1 Thlr. Prämie zahlt, die Gesammtheit dieser Prämien zu 16074,49 Thaler anwächst. Die Bank hat nun an die das 18te Jahr überle-

lebenden, d. i. an 499 Kinder je 100 Thlr. auszuzahlen, mithin in Summa 49900 Thlr., welche Summe also durch Prämien aufgebracht werden muss. Die dieser Summe entsprechende Prämie finden wir aber durch die Proportion

$$16074{,}49 : 49900 = 1 : x,$$

$$\text{also } x = \frac{49900}{16074{,}49} = 3{,}1043$$

$$= 3 \text{ Thlr. } 3 \text{ Sgr. } 2 \text{ Pf. c.}$$

Die für die verschiedenen Alter von der Geburt bis zum 12ten Lebensjahre für eine Versicherung von 100 Thlr. zahlbar nach Vollendung des 18ten, 21sten und 24sten Lebensjahres zu zahlenden Prämien sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Jährliche Prämie zur Versicherung von 100 *Thalern, zahlbar bei Vollendung des* 18*ten*, 21*sten und* 24*sten Lebensjahres.*

Alter des Kindes.	Bei Vollendung des 18. Jahres.	Bei Vollendung des 21. Jahres.	Bei Vollendung des 24. Jahres.
Jahr.	Thaler.	Thaler.	Thaler.
Geburt.	3, 10	2, 52	2, 02
1	3, 63	2, 85	2, 27
2	4, 05	3, 14	2, 48
3	4, 51	3, 46	2, 71
4	5, 01	3, 79	2, 95
5	5, 59	4, 17	3, 21
6	6, 26	4, 61	3, 51
7	6, 74	4, 90	3, 70
8	7, 63	5, 42	4, 04
9	8, 77	6, 03	4, 43
10	10, 05	6, 76	4, 88
11	11, 78	7, 63	5, 41
12	14, 09	8, 69	6, 00

Es versteht sich von selbst, dass zu diesen Prämiensätzen noch ein Verwaltungskosten-Aufschlag kommen muss, welcher je nach der Billigkeit und Liberalität der einzelnen Versicherungsanstalten allerdings eine sehr verschiedene Höhe hat. Nach der Billigkeit rangiren dieselben in folgender Reihenfolge.

Vergleichende Tabelle über die Prämien für eine Versicherung von 100 *Thalern zahlbar nach Vollendung des* 21*sten Lebensjahres.*

Alter des Kindes.	Normal-Prämiensatz *).	Janus in Hamburg.	Crown etc. Company.	Medical, Invalid etc. Society.	Lübecker Gesellschaft
Jahre.	Rt. Sgl. Sch.	Rt. Sgl. Sch.	Rt. Sgl. Sch.	Rt. Sgl. Sch.	Rt. Sgl. Sch.
Geburt.	2. 15. 8.	2. 23. —			2. 29. 6.
1	2. 25. 6.	3. 1. 3.	3. 5. 6.	3. 7. 6.	3. 8. 6.
2	3. 4. 3.	3. 10. —	3. 14. 9.	3. 16. 3.	3. 17. 4.
3	3. 13. 10.	3. 19. —	3. 22. 9.	3. 25. 6.	3. 26. 3.
4	3. 23. 9.	3. 28. 6.	4. 3. 6.	4. 5. 3.	4. 6. 7.
5	4. 5. 2.	4. 9. 6.	4. 14. 3.	4. 16. 2.	4. 17. 4.
6	4. 18. 4.	4. 21. 3.	4. 27. 9.	4. 28. 5.	4. 29. 6.
7	4. 27. —	5. 5. 3.	5. 10. 3.	5. 12. —	5. 13. 9.
8	5. 12. 8.	5. 21. 3.	5. 27. 9.	5. 28. —	5. 29. 6.
9	6. — 11.	6. 9. 9.	6. 16. 5.	6. 16. 6.	6. 17. 10.
10	6. 22. 10.	7. 3. —	7. 8. 3.	7. 8. 8.	7. 9. 10.
11	7. 18. 11.	7. 27. 9.			
12	8. 20. 8.	8. 29. 3.			

*) Mit diesem Namen bezeichnen wir den im Vorhergehenden berechneten Prämiensatz, zu welchem natürlich jede Versicherungsanstalt noch einen Verwaltungskosten-Aufschlag nehmen muss.

Der vorigen entsprechende Tabelle bei Zahlung von Hundert Thalern nach Vollendung des 24sten Lebensjahres.

Alter des Kindes.	Normal-Prämiensatz.			Deutsche Betriebs-Capitals- und Aussteuer-Anstalt in Berlin.		Janus in Hamburg.		
Jahre.	Rt.	Sgl.	Sz.	Rt.	Sgl.	Rt.	Sgl.	Sz.
Geburt.	2.	—	8.			2.	7.	9.
1	2.	8.	1.	2.	12.	2.	14.	3.
2	2.	14.	5.	2.	15.	2.	20.	9.
3	2.	21.	4.	2.	18.	2.	27.	3.
4	2.	28.	6.	2.	25.	3.	4.	—
5	3.	9.	4.	3.	2.	3.	11.	3.
6	3.	15.	2.	3.	9.	3.	19.	6.
7	3.	21.	—	3.	20.	3.	29.	3.
8	4.	1.	3.	3.	29.	4.	9.	9.
9	4.	12.	10.	4.	10.	4.	21.	6.
10	4.	26.	5.	4.	21.	5.	4.	9.
11	5.	12.	4.	5.	9.	5.	20.	3.
12	6.	—	—	5.	22.	6.	7.	9.

Anmerkung. Die Vergleichung obiger Prämiensätze zeigt, dass die Deutsche Betriebs-Kapitals- und Aussteuer-Anstalt für den Handels- und Handwerkerstand in Berlin zu niedrige Prämien nimmt, und deshalb, weil sie unmöglich dabei bestehen kann, in die Lage kommen muss, Nachschüsse zu erheben.

§. 53.

Aussteuerversicherung mit Rückgewährung der Versicherungsprämien.

Sollen die Versicherungsprämien von dem Versicherungsinstitute zurückgezahlt werden können, so muss letzteres wieder eine Zusatzprämie nehmen, die nicht mit zurückgezahlt wird. Es sind nun wieder zwei Fälle möglich, entweder werden die Versicherungsprämien erst zur Zeit, wo die versicherte Summe fällig wäre, also z. B. das 18te, 21ste oder 24ste Lebensjahr zurückgewährt, oder gleich beim Tode des Kindes.

A. Der erstere Fall ist der am leichtesten zu berechnende. Man hat nämlich nur in der Sterblichkeitstafel nachzusehen, wie viele von 1000 bei der Geburt versicherten Kindern bis zum 1sten, dann bis zum 2ten, zum 3ten u. s. w. Jahre sterben und zu bedenken, dass die erstere erst einmal, die folgenden zweimal, die wieder folgenden dreimal u. s. f. Prämien gezahlt haben. Werden nun die Prämien wieder zu 1 Thlr. angenommen, so hat man demnach die Zahl der in den einzelnen Jahren Gestorbenen der Reihe nach mit 1, 2, 3 bis 18 (resp. 21 oder 24) zu multipliciren, die Produkte zu addiren und für die erhaltene Summe die Prämien zu berechnen, wie in §. 52. angegeben worden ist.

B. Im zweiten Falle, wo die Prämien sofort beim Tode des Kindes restituirt werden, ist der künftige Werth (resp. im 18ten, 21sten, 24sten Jahre) dieser Zahlung zu ermitteln und die diesem entsprechenden Prämien nach dem vorher angezogenen Paragraphe zu berechnen.

Für die weiteren Berechnungen beider Fälle stellen wir zunächst folgende selbstverständliche Tabelle auf.

Von 1000 gleichzeitig Gebornen und bei der Geburt Versicherten sterben		Diesen ist für gezahlte Prämien à 1 ℛℓ. zurückzugewähren:	Künftiger Werth der Rückgewährungen.	Ausgerechnet:
bis zum Jahre:	wie viel?			
1	250	250	$250 . 1,04^{17}$	486,975
2	89	178	$178 . 1,04^{16}$	333,390
3	43	129	$129 . 1,04^{15}$	232,323
4	25	100	$100 . 1,04^{14}$	173,168
5	14	70	$70 . 1,04^{13}$	116,555
6	12	72	$72 . 1,04^{12}$	115,272
7	11	77	$77 . 1,04^{11}$	118,538
8	9	72	$72 . 1,04^{10}$	106,576
9	8	72	$72 . 1,04^{9}$	102,474
10	7	70	$70 . 1,04^{8}$	95,800
11	5	55	$55 . 1,04^{7}$	72,376
12	4	48	$48 . 1,04^{6}$	60,735
13	4	52	$52 . 1,04^{5}$	63,266
14	4	56	$56 . 1,04^{4}$	65,512
15	4	60	$60 . 1,04^{3}$	67,492
16	4	64	$64 . 1,04^{2}$	69,222
17	4	68	$68 . 1,04^{1}$	70,720
18	4	72	72	72,000
	Summa 1565 ℛℓ.		Summa 2422,394 ℛℓ.	

Nehmen wir weiter an, im ersten Lebensjahre würden 750, im zweiten 661 u. s. f. versichert, so würden ebensoviel der vorigen analoge Tabellen zu berechnen sein, in Bezug auf welche wir uns hier begnügen, deren Endresultate in nachfolgender Tabelle zusammenzustellen. Wir nehmen hierbei an, dass nur bis zum 12ten Lebensjahre Versicherungen zugelassen würden.

Versicherungen im Jahre	Versicherung für's 18. Lebensjahr.		Versicherung für's 21. Lebensjahr.		Versicherung fürs 24. Jahr.
	Baarer Werth der Rückgewährung.	Künftiger Werth der Rückgewährung.	Baarer Werth der Rückgewährung.	Künftiger Werth der Rückgewährung.	Baarer Werth der Rückgewährung.
0	1565	2422,394	1826	2995,268	2171
1	1064	1516,080	1312	1962,300	1642
2	813	1096,312	1048	1476,630	1363
3	651	844,082	873	1179,420	1173
4	532	668,870	741	978,844	1026
5	438	536,949	634	806,964	904
6	358	428,342	541	671,308	796
7	290	338,950	460	557,267	700
8	233	266,492	390	462,275	615
9	185	207.356	329	382,267	539
10	145	159,606	276	315,069	471
11	112	121,423	230	258,631	410
12	84	89,830	189	209,610	354

Die Tabellen pag. 105, 107 und 113 enthalten alle Elemente, welche zur Berechnung der Zusatzprämien bei Rückgewährung im 18. etc. Jahre sowohl, als bei der Geburt erforderlich sind. Zur näheren Erläuterung mögen einige Beispiele dienen.

74. Beispiel.

Welche Zusatzprämie muss ein Versicherungsinstitut ausser der behufs einer Versicherung von 100 *Thlr. zahlbar im* 18. *Lebensjahre von der Geburt ab zu zahlenden Versicherungsprämie im Betrage von* 3,10 *Thlr. nehmen, wenn die Versicherungsprämien, im Fall das Kind vor dem* 18*ten Jahre stirbt, zu letzterer Zeit zurückgezahlt werden sollen?*

Bei 1 Thaler Versicherungsprämie hat das Institut nach Tabelle pag 113. bei 1000 versicherten Kindern 1565 Thlr., also bei 3,10 Thlr. Versicherungsprämie 3,10 . 1565 zurückzuzahlen. Diese Summe ist durch Zusatzprämien aufzubringen. Nun bringt nach Tabelle pag. 107 eine Prämie von 1 Thlr. eine Summe von 16074,49 Thalern auf, wir haben deshalb, wenn wir die gesuchte Zusatzprämie mit x bezeichnen, die Proportion

$$x : 1 = 3{,}10 . 1565 : 16074{,}49,$$

also

$$x = \frac{3{,}10 . 1565}{16074{,}49} \text{ Thlr.}$$

$$= \frac{3{,}10 . 1565 . 30}{16074{,}49} \text{ Sgr.}$$

$$= 9 \text{ Sgr. } 1 \text{ Pf. c.}$$

Wenn also für ein Kind neben der Versicherungsprämie im Betrage von 3 Thlr. 3 Sgr. noch eine Zusatzprämie von 9 Sgr. 1 Pf. bezahlt wird, so ist das Versicherungsinstitut im Stande am Versicherungstermine die bis zum Tode des vorher gestorbenen Kindes gezahlten Versicherungsprämien zurückzuzahlen.

75. Beispiel.

Welche Zusatzprämie muss bei einer Versicherung im 5ten Lebensjahre neben der Versicherungsprämie im Betrage von 5,59 Thlr. gezahlt werden, wenn im Uebrigen dieselben Verhältnisse stattfinden, wie vorher?

Bei 1 Thlr. Versicherungsprämie hat das Institut nach Tabelle pag. 113. bei 579 versicherten Kindern 438 Thaler, also bei 5,59 Thaler Versicherungsprämien 5,59 . 438 Thaler zurückzuzahlen. Diese Summe ist durch Zusatzprämie aufzubringen. Nach Tabelle pag. 107 bringt 1 Thlr. eine Summe von 8933, 16 Thalern auf, deshalb setzen wir zur Auffindung der Zusatzprämie x die Proportion

$$x : 1 = 5{,}59 . 438 : 8933{,}16$$

$$x = \frac{5{,}59 . 438}{8933{,}16} \text{ Thlr.}$$

$$= \frac{5{,}59 \,.\, 438 \,.\, 30}{8933{,}16} \text{ Sgr.}$$

$$= 8 \text{ Sgr. } 3 \text{ Pf.}$$

76. Beispiel.

Welche Zusatzprämie muss gezahlt werden, wenn die Versicherungsprämien gleich beim Tode des Kindes zurückgezahlt werden sollen, im Uebrigen aber Alles wie im 74sten Beispiele bleibt?

Es ändert sich die Rechnung nur insofern, als jetzt nicht 1565 Thlr., sondern der künftige Werth der Rückgewährungen, d. i. nach Tabelle pag. (113) eine Summe von 2422,394 Thlr. durch Zusatzprämien aufgebracht werden müssen. Wir haben also jetzt

$$x = \frac{3{,}10 \,.\, 2422{,}394 \,.\, 30}{16074{,}49} \text{ Sgr.}$$

$$= 14 \text{ Sgr. } 1 \text{ Pf. c.}$$

§. 54.

Aussteuerversicherung mit Rückgewährung der gesammten Prämien.

Wir sondern wieder die Fälle: A. Rückgewährung am Versicherungstermine und B. Rückgewährung beim Tode des Kindes. Bei beiden Versicherungsarten ist nur festzuhalten, dass, wenn v die Versicherungsprämie und x die Zusatzprämie bezeichnet, nicht v allein, sondern $v + x$ zurückzuzahlen ist; es ist deshalb in vorigen Rechnungsformeln statt v nur $v + x$ einzusetzen. Die nachfolgenden Beispiele werden dies hinlänglich deutlich machen.

77. Beispiel.

Welche Zusatzprämie muss gezahlt werden, wenn die Versicherungsprämie à 3,10 *Thlr. sammt den Zusatzprämien, im Falle das Kind vor dem* 18. *Jahre stirbt, zu letzterer Zeit zurückgezahlt werden sollen, im Uebrigen aber die Verhältnisse des* 74. *Beispieles stattfinden?*

Wir haben hier (vergl. 74. Beispiel) die Proportion

$$x : 1 = (3{,}10 + x)\,1565 : 16074{,}49$$

also

$$16074{,}49\,x = 3{,}10 \,.\, 1565 + 1565\,x$$

$$14509{,}49\,x = 3{,}10 \,.\, 1565$$

$$x = \frac{3{,}10 \,.\, 1565}{14509{,}49} \text{ Thlr.}$$

$$= \frac{3{,}10 \,.\, 1565 \,.\, 30}{14509{,}49} \text{ Sgr.}$$

$$= 10 \text{ Sgr. } 1 \text{ Pf. c.}$$

Da die Versicherungsprämie 3,10 Thlr. = 3 Thlr. 3 Sgr. beträgt, so können demnach bei einer Gesammtprämie von 3 Thlr. 13 Sgr. 3 Pf. die ganzen Prämien zum Versicherungstermine zurückgezahlt werden.

78. Beispiel.

Welche Zusatzprämie muss genommen werden, wenn die gesammten Prämien gleich beim Tode des Kindes zurückgezahlt werden sollen, im Uebrigen aber Alles wie im 74sten Beispiele bleibt?

Wir haben hier die Proportion

$$x : 1 = (3{,}10 + x) \,.\, 2422{,}394 : 16074{,}49,$$

$$16074{,}49\,x = 3{,}10 \,.\, 2422{,}394 + 2422{,}394 \,.\, x$$

$$13652{,}1\,x = 3{,}1 \,.\, 2422{,}394$$

$$x = \frac{3{,}1 \,.\, 2422{,}394}{13652{,}1} \text{ Thlr.}$$

$$= \frac{3{,}1 \,.\, 2422{,}394 \,.\, 30}{13652{,}1} \text{ Sgr.}$$

$$= 16 \text{ Sgr. } 7 \text{ Pf. c.}$$

Anmerkung. Die nachfolgende Tabelle enthält die auf die angegebene Weise berechneten Prämiensätze, welche genommen werden müssen, wenn bei einer Versicherung von 100 Thlr. zahlbar nach Vollendung des 18ten, 21sten und 24sten Lebensjahres im Todesfalle die Prämien zum Versicherungstermine zurückgezahlt werden sollen; und zweitens eine Tabelle über die Prämien, welche bei gleicher Versicherung fürs 18te und 21ste Jahr sofort beim Tode zurückgezahlt werden sollen.

Prämien zur Versicherung von Hundert Thalern, zahlbar im 18*ten*, 21*sten und* 24*sten Lebensjahre, welche, wenn das Kind stirbt, zum Versicherungstermine zurückgezahlt werden.*

Alter des Kindes.	18tes Lebensjahr.	21stes Lebensjahr.	24stes Lebensjahr.
Jahre.	Thaler.	Thaler.	Thaler.
Geburt.	3,44	2,79	2,23
1	3,94	3,09	2,47
2	4,34	3,37	2,68
3	4,80	3,69	2,91
4	5,30	4,03	3,16
5	5,88	4,42	3,43
6	6,56	4,86	3,74
7	7,02	5,24	3,92
8	7,92	5,67	4,27
9	9,07	6,29	4,67
10	10,36	7,03	5,14
11	12,10	7,92	5,65
12	14,44	9,00	6,29

Anmerkung. In dieser und der nachfolgenden Tabelle ist die zweite Dezimalstelle wegen der unberücksichtigten folgenden Ziffern überall um eine Einheit erhöht worden.

Prämien zur Versicherung von Hundert Thalern, zahlbar im 18*ten oder* 21*sten Lebensjahre, welche, wenn das Kind stirbt, am Ende des Todesjahres zurückgezahlt werden.*

Alter des Kindes.	Bei Vollendung des 18. Jahres.	Bei Vollendung des 21. Jahres.
Jahr.	Thaler.	Thaler.
Geburt.	3,66	2,99
1	4,09	3,23
2	4,45	3,48
3	4,89	3,78
4	5,38	4,11
5	5,95	4,49
6	6,62	4,93
7	7,07	5,20
8	7,96	5,72
9	9,10	6,34
10	10,39	7,08
11	12,13	7,96
12	14,46	9,03

§. 55.

Von den Leibrenten.

A. *Independente Berechnung.*

Wir stellen uns zunächst folgende Aufgabe:

Welches ist der gegenwärtige Werth w *einer nachschussweisen Rente* r, *welche einer Person von* n *Jahren auf Lebenszeit gewährt wird, wenn* p % *berechnet werden?*

Setzen wir wieder $\frac{p+100}{100} = e$, so wäre der gegenwärtige Werth der ersten Rentenzahlung, wenn sie be-

stimmt erfolgen würde nach §. 3. $\frac{r}{e}$, der zweiten $\frac{r}{e^2}$, der dritten $\frac{r}{e^3}$ u. s. f. Nun hängt aber die Zahlung der Renten davon ab, ob der Rentenempfänger zur Zahlungszeit noch lebt. Die Wahrscheinlichkeit aber, dass die *n*jährige Person nach einem Jahre noch lebt, ist nach der in §. 43. eingeführten Bezeichnung $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, die Wahrscheinlichkeit ferner, dass die Person noch 2, 3, 4 u. s. f. Jahre noch lebt, ist in entsprechender Weise $\frac{a_{n+2}}{a_n}$, $\frac{a_{n+3}}{a_n}$, $\frac{a_{n+4}}{a_n}$ u. s. f., mithin haben nach §. 41. die einzelnen Rentenzahlungen für den Rentenempfänger nur die Werthe

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{r}{e}, \quad \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{r}{e^2}, \quad \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{r}{e^3}, \text{ u. s. f.,}$$

folglich haben die gesammten Renten den Werth

$$w = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{r}{e} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{r}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{r}{e^3} + \ldots$$

Diese Reihe ist soweit fortzusetzen, bis sie wegen der in der angewandten Sterblichkeitstafel verschwindenden Zahlen von selbst abbricht. Nehmen wir an, die Rente betrage 1 Thlr., so ist $r = 1$ zu setzen, und unsere Berechnungsformel geht über in folgende:

$$w = \frac{1}{a_n} \left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots \right) \ldots \quad (D)$$

79. Beispiel.

Welches ist der baare Werth einer nachschussweisen Leibrente von 1 *Thlr. für eine* 92*jährige Person, wenn die Deparcieux'sche Sterblichkeitstafel benutzt wird und* 4% *Zinsen berechnet werden?*

Setzen wir die Klammer der vorigen Reihe $= k$, so haben wir

$$w = \frac{k}{a_n}$$

und zwar

$$k = \frac{a_{93}}{1,04} = 14 . 0,9615385 = 13,4615390$$

$$+ \frac{a_{94}}{1,04^2} = 6 . 0,9245562 = 5,5473372$$

$$+ \frac{a_{95}}{1,04^3} = 3 . 0,8889964 = 2,6669892$$

$$+ \frac{a_{96}}{1,04^4} = 1 . 0,8548042 = 0,8548042$$

$$22,5306696.$$

Es ist nun

$$w = \frac{k}{a_{92}} = \frac{22,5306696}{28}$$

$$= 0,8047 \text{ Thaler.}$$

B. *Recurrirende Berechnung.*

Je weiter das Alter des Rentenkäufers von 96 Jahren entfernt ist, desto mühsamer wird natürlich die Berechnung des Werthes der Leibrente. Man kann sich jedoch bei Berechnung einer Tabelle für diese Werthe die Rechnung sehr erleichtern, wenn man bei der Berechnung des Werthes für irgend ein Alter den für das um 1 Jahr höhere bereits berechneten benutzt. Es ist nämlich aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres klar, dass der Werth w' einer Person von $(n-1)$ Jahren nach Formel (D) folgender ist:

$$w' = \frac{1}{a_{n-1}} \left(\frac{a_n}{e} + \frac{a_{n+1}}{e^2} + \frac{a_{n+2}}{e^3} + \frac{a_{n+3}}{e^4} + \ldots \right)$$

oder

$$w' = \frac{1}{e \, . \, a_{n-1}} \left(a_n + \frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots \right)$$

Nun ist aber wegen (D)

$$\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots = w \, . \, a_n ,$$

folglich erhalten wir nach Einsetzung dieses Werthes in die Formel für w' den Ausdruck

$$w' = \frac{1}{e \cdot a_{n-1}} \cdot (a_n + w \cdot a_n)$$

oder

$$w' = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot (1 + w) \cdot \frac{1}{e} \quad \ldots \quad (E)$$

80. Beispiel.

Ausrechnung des 79. *Beispieles nach der Formel* (E).

Alter des Rentenkäufers.	Werth einer Leibrente im Betrage von 1 Thaler.
96 Jahre	0,0000
95 „ .. $\frac{1}{3}$. (1 + 0,0000) . 0,9615	= 0,3205
94 „ .. $\frac{3}{6}$. (1 + 0,3205) . 0,9615	= 0,6349
93 „ .. $\frac{6}{14}$. (1 + 0,6349) . 0,9615	= 0,6737
92 „ .. $\frac{14}{28}$. (1 + 0,6737) . 0,9615	= 0,8047.

Wir theilen im Nachfolgenden eine Tabelle über die baaren Werthe einer Leibrente in den verschiedenen Lebensaltern mit.

Werth einer Leibrente von 1 *Thaler nach Francis Baily.*

Alter.	3%	3½%	4%	Alter.	3%	3½%	4%
4	22,390	20,319	18,559	49	14,244	13,494	12,807
5	22,597	20,518	18,749	50	13,899	13,183	12,526
6	22,726	20,647	18,877	51	13,567	12,883	12,255
7	22,791	20,720	18,953	52	13,248	12,596	11,995
8	22,813	20,754	18,996	53	12,919	12,298	11,725
9	22,815	20,770	19,022	54	12,579	11,989	11,443
10	22,766	20,742	19,008	55	12,252	11,692	11,173
11	22,664	20,665	18,949	56	11,914	11,383	10,891
12	22,506	20,536	18,844	57	11,565	11,063	10,597
13	22,343	20,403	18,734	58	11,228	10,755	10,314
14	22,175	20,266	18,620	59	10 881	10,436	10,020
15	22,002	20,123	18,502	60	10,522	10,104	9,713
16	21,823	19,976	18,380	61	10,151	9,760	9,393
17	21,666	19,849	18,275	62	9,766	9,402	9,060
18	21,505	19,717	18,167	63	9,392	9,053	8,734
19	21,339	19,581	18,054	64	9,005	8,691	8,394
20	21,168	19,441	17,938	65	8,604	8,314	8,039
21	21,020	19,321	17,841	66	8 212	7,944	7,691
22	20,867	19,197	17,740	67	7,830	7,584	7,350
23	20,711	19,071	17,637	68	7,460	7,234	7,019
24	20,550	18,940	17,530	69	7,104	6,896	6,699
25	20,386	18,805	17,420	70	6,766	6,575	6,394
26	20,217	18,667	17,306	71	6,424	6,250	6,084
27	20,043	18,524	17,188	72	6,105	5,946	5,794
28	19,864	18,377	17,066	73	5,789	5,644	5,506
29	19,681	18,225	16,940	74	5,479	5,348	5,222
30	19,492	18,069	16,810	75	5,178	5,060	4,945
31	19,298	17,907	16,675	76	4,862	4,755	4,652
32	19,099	17,741	16,535	77	4,557	4,462	4,370
33	18,893	17,568	16,390	78	4,273	4,188	4,105
34	18,682	17,390	16,240	79	3,984	3,908	3,834
35	18,464	17,207	16,084	80	3,730	3,662	3,596
36	18,240	17,017	15,922	81	3,448	3,428	3,370
37	18,009	16,820	15,755	82	3,269	3,216	3,164
38	17,742	16,590	15,556	83	3,031	2,984	2,939
39	17,467	16,352	15,349	84	2,757	2,717	2,679
40	17,183	16,105	15,133	85	2,490	2,457	2,424
41	16,889	15,848	14,907	86	2,240	2,212	2,185
42	16,585	15,581	14,673	87	2,023	2,000	1,977
43	16,271	15,304	14,427	88	1,747	1,728	1,711
44	15,946	15,016	14,171	89	1,474	1,460	1,446
45	15,609	14,716	13,904	90	1,208	1,198	1,187
46	15,260	14,405	13,625	91	0,955	0,948	0,941
47	14,925	14,105	13,357	92	0,721	0,716	0,712
48	14,578	13,794	13,076	93	0,485	0,483	0,481

C. *Leibrenten verbundener Personen, zahlbar bis zum Tode des Zuerststerbenden.*

Wir wollen uns zunächst zwei Personen denken, welche sich gemeinschaftlich eine Rente erwerben wollen, die so lange gezahlt wird, als noch beide leben. Ist die eine Person n Jahre alt, die zweite hingegen p Jahre, so ist die mathematische Hoffnung auf den Genuss der ersten Rente r

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot r,$$

folglich ihr gegenwärtiger Werth

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{r}{e},$$

entsprechend ist der gegenwärtige Werth der zweiten Rente

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{r}{e^2}, \quad \text{u. s. f.}$$

mithin der Gesammtwerth sämmtlicher Renten, wenn wir wieder $r = 1$ setzen,

$$w = \frac{1}{a_n \cdot a_p}\left(\frac{a_{n+1} \cdot a_{p+1}}{e} + \frac{a_{n+2} \cdot a_{p+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3} \cdot a_{p+3}}{e^3} + ..\right) .. (F).$$

Für zwei Personen, von denen jede ein Jahr jünger ist, erhalten wir entsprechend

$$w' = \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_{p-1}}\left(\frac{a_n \cdot a_p}{e} + \frac{a_{n+1} \cdot a_{p+1}}{e^2} + \frac{a_{n+2} \cdot a_{p+2}}{e^3} + ..\right)$$

$$= \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_{p-1}} \cdot \frac{1}{e}\left(a_n \cdot a_p + \frac{a_{n+1} \cdot a_{p+1}}{e} + \frac{a_{n+2} \cdot a_{p+2}}{e^2} + ..\right)$$

und weil nach (F)

$$\frac{a_{n+1} \cdot a_{p+1}}{e} + \frac{a_{n+2} \cdot a_{p+2}}{e^2} + \ldots = w \cdot a_n \cdot a_p$$

ist, so haben wir

$$w' = \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_{p-1}} \cdot \frac{1}{e}(a_n \cdot a_p + w \cdot a_n \cdot a_p)$$

$$\text{oder} \quad w' = (1 + w) \cdot \frac{a_n \cdot a_p}{a_{n-1} \cdot a_{p-1}} \cdot \frac{1}{e} \ldots (G),$$

ein Ausdruck, welcher dem unter (E) aufgestellten ganz analog ist.

81. Beispiel.

Welches ist der baare Werth einer Rente von 1 Thlr. für zwei Personen von 92 und 80 Jahren, welche so lange gezahlt wird, als noch beide leben, mit Benutzung der Deparcieux'schen Sterblichkeitstafel und bei 4% Zinsen?

95 und 83 Jahre, $= 0{,}0000$

94 „ 82 „ $= (1+0{,}000) \cdot \frac{1.492}{3.590} \cdot 0{,}9615 = 0{,}2904$

93 „ 81 „ $= (1+0{,}2904) \cdot \frac{3.590}{6.697} \cdot 0{,}9615 = 0{,}5252$

92 „ 80 „ $= (1+0{,}5252) \cdot \frac{6.697}{14.812} \cdot 0{,}9615 = 0{,}5395.$

Der baare Werth einer solchen Rente ist also 0,5395 Thlr., von 100 Thlr. also 53,95 Thlr.

Anmerkung. Bei drei und mehreren Personen von $m, n, p, \ldots$ Jahren ist die Berechnung ganz analog und man erhält, wie sich jetzt leicht übersehen lässt, den der Formel (G) entsprechenden Ausdruck:

$$w' = (1+w)\,\frac{a_m \cdot a_n \cdot a_p \ldots}{a_{m+1} \cdot a_{n+1} \cdot a_{p+1} \ldots} \cdot \frac{1}{e} \ldots \quad (H).$$

D. *Leibrenten verbundener Personen, zahlbar bis zum Tode des Zuletztsterbenden.*

Bei zwei Personen von n und p Jahren ist die Wahrscheinlichkeit, dass noch nicht beide nach einem Jahre gestorben sind nach §. 46. (f.)

$$1 - \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_n}\right).$$

Da nun von dieser Wahrheinlichkeit der Genuss der ersten Rente r abhängig ist, so ist ihr gegenwärtiger Werth

$$\left[1 - \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_n}\right)\right] \cdot \frac{r}{e} \ldots$$

Dieselbe Betrachtung in Betreff der übrigen Renten führt in Betreff des Gesammtwerthes der Leibrente für $r = 1$ zu folgender Formel

$$w = \left[1 - \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_n}\right)\right] \cdot \frac{1}{e} +$$
$$\left[1 - \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+2}}{a_n}\right)\right] \cdot \frac{1}{e^2} + \ldots \text{(J)}.$$

82. Beispiel.

Welches ist der baare Werth einer Leibrente von 1 Thlr, für zwei Personen von 92 und 90 Jahren, welche so lange gezahlt wird, als überhaupt noch eine von beiden Personen lebt?

Wir haben hier $a_n = 28$, $a_p = 80$, $a_{n+1} = 14$, $a_{p+1} = 50$, u. s. f., also

$$1 - \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_p}\right) =$$

$$1 - \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_p - a_{p+1}}{a_p} = 1 - \frac{14}{28} \cdot \frac{30}{80} = \frac{13}{16};$$

$$1 - \frac{a_n - a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{a_n - a_{p+2}}{a_p} = 1 - \frac{22}{28} \cdot \frac{52}{80} = \frac{137}{280};$$

$$1 - \frac{a_n - a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{a_p - a_{p+3}}{a_p} = 1 - \frac{25}{28} \cdot \frac{66}{80} = \frac{59}{224};$$

$$1 - \frac{a_n - a_{n+4}}{a_n} \cdot \frac{a_p - a_{p+4}}{a_p} = 1 - \frac{27}{28} \cdot \frac{74}{80} = \frac{121}{1120};$$

$$1 - \frac{a_n - a_{n+5}}{a_n} \cdot \frac{a_p - a_{p+5}}{a_p} = 1 - \frac{77}{80} = \frac{3}{80};$$

$$1 - \frac{a_n - a_{n+6}}{a_n} \cdot \frac{a_p - a_{p+6}}{a_p} = 1 - \frac{79}{80} = \frac{1}{80} \ldots$$

Setzen wir diese Werthe in die Formel (J) ein, so erhalten wir

$$w = \frac{13}{16} \cdot \frac{1}{1{,}04} = 0{,}78125$$
$$+ \frac{137}{280} \cdot \frac{1}{1{,}04^2} = 0{,}45237$$
$$+ \frac{59}{224} \cdot \frac{1}{1{,}04^3} = 0{,}23415$$
$$+ \frac{121}{1120} \cdot \frac{1}{1{,}04^4} = 0{,}09325$$

$$+ \frac{3}{80} \cdot \frac{1}{1{,}04^5} = 0{,}03082$$

$$+ \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{1{,}04^6} = 0{,}00988$$

$$w = 1{,}60172 \text{ Thaler.}$$

Anmerkung. Die entsprechende Rechnung für mehr als zwei Personen dürfte ohne Weiteres klar sein.

E. *Aufgeschobene Leibrenten.*

Wird eine jetzt gekaufte Rente erst nach k Jahren gezahlt, so sind die k ersten Glieder der Klammer in Formel (D), da diese die baaren Werthe der in den k ersten Jahren gezahlten Renten ausdrücken, offenbar gleich Null und wir erhalten demnach, wenn der Rentenkäufer jetzt n Jahre alt ist, als baaren Werth der Rente

$$w = \frac{1}{a_n} \cdot \left(\frac{a_{n+k+1}}{e^{k+1}} + \frac{a_{n+k+2}}{e^{k+2}} + \cdots \right)$$

oder

$$w = \frac{1}{a_n \cdot e^k} \cdot \left(\frac{a_{n+k+1}}{e} + \frac{a_{n+k+2}}{e^2} + \cdots \right) \cdots \text{(K)}.$$

Multiplicirt und dividirt man den Ausdruck rechts mit a_{n+k}, und schreibt also

$$w = \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{1}{e^k} \cdot \frac{1}{a_{n+k}} \left(\frac{a_{n+k+1}}{e} + \frac{a_{n+k+2}}{e^2} + \cdots \right) \cdots \text{(L)}$$

so kann man sagen: Um den baaren Werth einer k Jahre aufgeschobenen Leibrente für eine Person von n Jahren zu berechnen, hat man nur den Werth einer sofort beginnenden Rente für eine Person von $(n+k)$ Jahren mit dem Faktor

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{1}{e^k}$$

zu multipliciren.

83. Beispiel.

Welches ist der baare Werth einer 10 *Jahre lang aufgeschobenen Leibrente für eine Person von* 82 *Jahren?*

Nach dem 79. Beispiele ist der baare Werth einer sofort beginnenden Leibrente für eine Person von 92 Jahren gleich 0,8047 Thaler. Da nun im gegenwärtigen Falle $n = 82$ und $k = 10$, folglich nach Deparcieux

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{1}{e^k} = \frac{a_{92}}{a_{82}} \cdot \frac{1}{1{,}04^{10}} = \frac{28}{590} \cdot 0{,}6755642$$

ist, so erhalten wir für unseren gesuchten Werth

$$w = \frac{28}{590} \cdot 0{,}6755642 \cdot 0{,}8047$$
$$= 0{,}0258 \text{ Thaler.}$$

F. *Temporäre Leibrenten.*

Wird nach dem baaren Werthe einer blos k Jahre hindurch zahlbaren Leibrente für eine $n$jährige Person gefragt, so leuchtet von selbst ein, dass man diesen Werth findet, wenn man vom Werthe einer sofort beginnenden lebenslänglichen Leibrente den Werth einer k Jahre aufgeschobenen subtrahirt. Es fallen nämlich in der Klammer der Formel (D) alle Glieder fort, welche auf das Glied

$$\frac{a_{n+k}}{e^k}$$

folgen. Die Formel für den gesuchten Werth ist demnach

$$w = \frac{1}{a_n} \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots + \frac{a_{n+k}}{e^k} \right) \ldots \quad \text{(M).}$$

84. Beispiel.

Welches ist der baare Werth einer zwei Jahre hindurch zahlbaren Rente für eine Person von 92 *Jahren?*

Der baare Werth einer sofort beginnenden Leibrente für eine Person von 92 Jahren ist nach dem 80. Beispiele:

$$x = 0{,}8047$$

und der einer zwei Jahre lang aufgeschobenen nach demselben Beispiele und der unter E. angegebenen Regel

$$y = \frac{a_{94}}{a_{92}} \cdot \frac{1}{e^2} \cdot 0{,}6349$$
$$= \frac{6}{28} \cdot 0{,}9245562 \cdot 0{,}6349$$
$$= 0{,}0199.$$

Subtrahiren wir y von x, so erhalten wir

$$w = 0{,}8047 - 0{,}0199$$
$$= 0{,}7848 \text{ Thaler}$$

als den gesuchten Werth der zweijährigen Leibrente.

Anmerkung. Die Berechnung der beiden letzten Leibrenten für zwei und mehre Personen ist nach den früheren analogen Untersuchungen jetzt leicht zu übersehen und gehen wir deshalb nicht weiter darauf ein. —

G. *Erwerbung aufgeschobener Leibrenten oder Pensionen durch vorgängige Prämienzahlung.*

Zahlt Jemand von seinem $n$ten Lebensjahre ab sofort und die nächstfolgenden k Jahre hindurch eine bestimmte Summe s an eine Rentenbank, um sich dadurch eine ein Jahr nach der letzten Prämienzahlung (d. h. also im $(n+k+1)$sten Lebensjahre) beginnende Leibrente r zu sichern, so haben wir, um eine Relation zwischen den genannten Grössen zu erlangen, sowohl den baaren Werth der Leistung des Rentenkäufers, als den der Gegenleistung der Rentenbank zu ermitteln und beide Werthe gleich zu setzen. Beginnen wir mit dem baaren Werthe der Leistung des Rentenkäufers, so ist dieser, wenn wir vorläufig von der ersten Einzahlung der Summe s absehen, offenbar gleich dem baaren Werthe w einer temporären k Jahre hindurch zahlbaren Rente; und wenn wir die erste Zahlung zurechnen,

$$= s + w.$$

Der baare Werth der Gegenleistung der Bank ist aber, wie sofort erhellt, gleich dem baaren Werthe w' einer k Jahre aufgeschobenen Leibrente. Soll nun auf keiner Seite ein Nachtheil sein, so haben wir

$$s + w = w'$$

zu setzen. Nun ist aber nach (M)

$$w = \frac{s}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + .. + \frac{a_{n+k}}{e^k}\right)$$

und nach (L)

$$w' = \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{1}{e^k} \cdot \frac{1}{a_{n+k}}\left(\frac{a_{n+k+1}}{e} + \frac{a_{n+k+2}}{e^2} + ...\right)$$

so dass wir nach Einsetzung dieser Werthe die Formel erhalten:

$$s\left\{1 + \frac{1}{a_n}\,\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + .. + \frac{a_{n+k}}{e^k}\right)\right\}$$

$$= \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{1}{e^k} \cdot \frac{1}{a_{n+k}}\left(\frac{a_{n+k+1}}{e} + \frac{a_{n+k+2}}{e^2} + ...\right) .. (N).$$

Anmerkung. Diese Berechnung kommt vorzugsweise in Anwendung bei der Bestimmung der Pensionen, die Beamten im Falle der Dienstunfähigkeit gegen einen vorher gezahlten Beitrag gewährt werden. Die Grösse k wird hier durch das erfahrungsmässig mittlere Lebensalter, in welchem für eine bestimmte Beamtengattung die Dienstunfähigkeit eintritt, bestimmt.

85. Beispiel.

Welchen Pensionsbeitrag hat das Mitglied einer Beamtenklasse, bei welcher erfahrungsmässig die mittlere Zeit der Dienstunfähigkeit in das 55ste Lebensjahr fällt, von seinem 30. Lebensjahre an zu zahlen, wenn demselben vom 56sten Lebensjahre ab bis zum Tode eine jährliche Pension von 100 Thalern gegeben werden soll?

In der Formel (N) ist hier gegeben, $n = 30$, $k = 25$, ferner wenn wir $4\,\%$ annehmen, $e = 1{,}04$ und s ist gesucht.

Wir suchen zunächst den Ausdruck

$$\frac{1}{a_{n+k}}\left(\frac{a_{n+k+1}}{e} + \frac{a_{n+k+2}}{e^2} + ...\right) = \alpha,$$

indem wir uns der Tabelle auf pag. 122 bedienen. Es ist nämlich nach Formel (D) der Ausdruck (α) der baare Werth einer Rente von 1 Thlr. für eine Person von $n + k = 55$ Jahren, und wir finden in erwähnter Tabelle

$$\alpha = 11{,}173.$$

Dieser Werth ist nun noch zu multipliciren mit

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot \frac{1}{e^k} = \frac{3631}{5005}\ 0{,}3751168 \text{ (vergl. Taf. V u. II.)}$$

Bezeichnen wir demnach die ganze rechte Seite der Formel (N) mit (β), so haben wir

$$\beta = \frac{3631}{5005} \cdot 0{,}3751168 \cdot 11{,}173$$
$$= 3{,}0406.$$

Gehen wir nun zurück zu dem Ausdrucke auf der linken Seite

$$\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots + \frac{a_{n+k}}{e^k}\right) = \gamma,$$

so finden wir dessen Werth wegen (M), wenn wir vom Werthe einer sofort (im 30sten Jahre) beginnenden Rente, d. i. nach Tabelle auf pag. 122 von 16,810, den Werth einer $k=25$ Jahre aufgeschobenen subtrahiren. Letzterer Werth ist aber wegen (L) gleich dem vorhergefundenen (β). Es ist somit

$$\gamma = 16{,}810 - 3{,}0406$$
$$= 13{,}769.$$

Wir erhalten demnach für die ganze Gleichung (N)

$$s(1 + 13{,}769) = 3{,}0406,$$

$$\text{also} \quad s = \frac{3{,}0406}{14{,}769} = 0{,}20588.$$

Das wäre der jährliche Pensionsbeitrag für eine jährliche Pension von 1 Thlr., für 100 Thlr. wäre also jährlich 20,588 Thaler zu entrichten.

Anmerkung. Aus diesem Beispiele ersieht man, welche ungemeinen Vortheile die preussische Beamten-Pensionskasse ihren Interessenten gewährt, da ganz unter den eben berührten Verhältnissen einem Beamten nach 25jähriger Dienstzeit schon gegen einen jährlichen Beitrag von 6 Thlr. 24 Sgr. eine Pension von 200 Thalern gesichert wird. —

Werth einer Leibrente von 1 *Thaler.*

Nach Deparcieux' Sterblichkeitstafel und für 4% berechnet von Bäntsch und Dannenberger.

Alter.	Thaler.	Alter.	Thaler.	Alter.	Thaler.
1	17,2236	33	16,4379	65	8,14204
2	17,8274	34	16,2810	66	7,83171
3	18,2606	35	16,1180	67	7,51430
4	18,5793	36	15,9487	68	7,18956
5	18,7706	37	15,7691	69	6,85722
6	18,8999	38	15,5787	70	6,51700
7	18,9771	39	15,3768	71	6,17217
8	19,0216	40	15,1629	72	5,82668
9	19,0358	41	14,9435	73	4,49284
10	19,0248	42	14,7147	74	5,18271
11	18,9788	43	14,4796	75	4,88930
12	18,9020	44	14,2378	76	4,62493
13	18,8025	45	13,9890	77	4,36685
14	18,6858	46	13,7328	78	4,11232
15	18,5577	47	13,4688	79	3,86168
16	18,4278	48	13,1966	80	3,62946
17	18,3028	49	12,9051	81	3,39743
18	18,1835	50	12,6143	82	3,17289
19	18,0694	51	12,3141	83	2,95709
20	17,9613	52	12,0028	84	2,74526
21	17,8562	53	11,7011	85	2,52736
22	17,7510	54	11,3993	86	2,29312
23	17,6457	55	11,1035	87	2,02157
24	17,5405	56	10,8112	88	1,72394
25	17,4354	57	10,5195	89	1,43651
26	17,3304	58	10,2254	90	1,18494
27	17,2257	59	9,92642	91	0,97175
28	17,1144	60	9,63082	92	0,80467
29	16,9960	61	9,33675	93	0,67370
30	16,8596	62	9,04148	94	0,63486
31	16,7249	63	8,74537	95	0,32051
32	16,5857	64	8,44551	96	0,00000

§. 56.

Ueber Wittwenkassen.

Die Einrichtung der Wittwenkassen ist im Allgemeinen folgende: Von zwei Eheleuten zahlt der Mann bei der Verheirathung eine Einlage und ausserdem sofort und später alljährlich einen Beitrag B bis zu seinem Tode; wogegen die Wittwenkasse seiner Wittwe bis zu deren Tode eine nachschussweise Pension P auszahlt. Um eine Berechnungsformel zwischen den drei Grössen E, B, P und dem angewandten Zinsfusse p, wo wir wieder $\frac{p+100}{100} = e$ setzen, zu finden, suchen wir die baaren Werthe der beiderseitigen Leistungen zu ermitteln. Für den einsteuernden Ehemann besteht der baare Werth der Leistung zunächst in der Einlage E, dem ersten Beitrage B und in der Summe der baaren Werthe der mathematischen Hoffnungen sämmtlicher späteren Beiträge. Diese Hoffnungen hängen aber ab von der Wahrscheinlichkeit, dass beide Eheleute an jedem Zahlungstermine noch leben. Ist nun der Mann n Jahre, die Frau hingegen k Jahre alt, so entsprechen den nachfolgenden Beiträgen die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_n}, \quad \text{u. s. f.,}$$

mithin ist die Gesammtleistung des Mannes

$$E + B + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{B}{e} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_k} \cdot \frac{B}{e^2} + ..$$

oder

$$X = E + B \left\{ 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{1}{e} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^2} + \ldots \right)$$

Die Gegenleistung der Wittwenkasse besteht nun in der Summe der baaren Werthe der mathematischen Hoffnungen sämmtlicher an die Wittwe zu zahlenden Pensionen. Diese Hoffnungen hängen aber ab von der Wahrscheinlichkeit, dass nach 1, 2, 3 u. s. w. Jahren der Mann gestorben, die Frau aber noch am Leben sei. Diese Wahrscheinlichkeiten sind nun

$$\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k}, \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+2}}{a_k} \text{ u. s. f.,}$$

es ist somit der baare Werth der Leistung Seitens der Wittwenkasse

$$Y = P.\left\{\begin{array}{l} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{1}{e} \ldots \\ + \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+2}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^2} \\ + \left(1 - \frac{a_{n+3}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+3}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^3} \\ + \ldots \end{array}\right\}$$

Setzen wir $X = Y$, so erhalten wir

$$E + B. \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{1}{e} \\ + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^2} \\ + \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+3}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^3} \\ + \ldots \end{array}\right\} = P.\left\{\begin{array}{l} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{1}{e} \\ + \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+2}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^2} \\ + \left(1 - \frac{a_{n+3}}{a_n}\right) \cdot \frac{a_{k+3}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^3} \\ + \ldots \end{array}\right\} \ldots (R)$$

Die eingeklammerten Reihen sind soweit fortzusetzen, bis sie nach den Sterblichkeitstafeln von selbst abbrechen.

Sind bei der Wittwenkasse noch sogenannte Gefahrjahre ausbedungen, d. h. ist festgesetzt, dass, wenn der Mann binnen der nächsten i Jahre stirbt, keine Pensionen gezahlt werden, sondern nur, wenn jener im $(i+1)$sten Jahre oder später stirbt, so hängt die Zahlung der ersten Pension am Ende des $(i+1)$sten Jahres davon ab, erstlich, dass der

Mann bis zum Ende des $i$ten Jahres am Leben, aber im Laufe des $(i+1)$ten Jahres gestorben sei; ferner aber davon, dass die Frau zur Zeit der Zahlung noch am Leben sei. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann am Ende des $i$ten Jahres noch lebt, ist

$$\frac{a_{n+i}}{a_n},$$

dass derselbe im Laufe des nächsten Jahres stirbt, davon ist die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{a_{n+i+1}}{a_{n+i}},$$

dass die Frau am Ende des $(i+1)$ten Jahres noch lebt, davon ist endlich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{a_{k+i+1}}{a_k},$$

mithin ist die Wahrscheinlickkeit, dass alle drei berührten Ereignisse gleichzeitig eintreffen,

$$\frac{a_{n+i}}{a_n} \cdot \left(1 - \frac{a_{n+i+1}}{a_{n+i}}\right) \cdot \frac{a_{k+i+1}}{a_k} =$$

$$\frac{a_{n+i} - a_{n+i+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+i+1}}{a_k} \cdot$$

Wenn wir in dieser Weise weiter schliessen, so erhalten wir für die rechte Seite der Formel (R)

$$Y = P. \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{n+i} - a_{n+i+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+i+1}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^{i+1}} \\ + \frac{a_{n+i+1} - a_{n+i+2}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+i+2}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^{i+2}} \\ + \frac{a_{n+i+2} - a_{n+i+3}}{a_n} \cdot \frac{a_{k+i+3}}{a_k} \cdot \frac{1}{e^{i+3}} \\ + \ldots \end{array} \right\}$$

Anmerkung. Bei der Allgemeinen Preussischen Beamten-Wittwenkasse sind 4 Gefahrjahre, es werden aber gleichwohl, wenn der Mann während dieser Zeit stirbt, der Wittwe steigende Parcellen, jenachdem der Todestag in's erste, zweite, dritte oder vierte Jahr fällt, von den versicherten Pensionen alljährlich gewährt.

§. 57.

Lebensversicherungs- und Sterbekassen-Rechnung.

A. *Bei jährlicher Prämienzahlung.*

Unter Lebensversicherung versteht man den Abschluss eines Contraktes zwischen einer Person und einem Versicherungsinstitute, nach welchem letzteres gegen Erlegung einer bestimmten Summe oder durch jährliche Prämienzahlung Seitens des Versicherten den Erben des letzteren nach dessen Tode eine bestimmte Summe auszahlt. Um die Berechnungsformel für diese Versicherungsert zu finden, stellen wir folgende allgemeine Aufgabe:

Welche Prämie muss eine Person von n Jahren jährlich pränumerando zahlen, damit den Erben derselben nach dem Tode des Versicherten ein Kapital von 1 Thaler ausgezahlt werden kann?

Wir haben natürlich sowohl die Leistungen des Versicherten als die der Bank ins Auge zu fassen und die baaren Werthe beider einander gleich zu setzen. Nehmen wir zu dem Ende an, dass a_n Personen sich versichern und jede die Prämie P Thlr. jährlich zahle, so besteht die erste der Bank zufliessende Zahlung in $a_n . P$ Thalern. Leben nach einem Jahre noch a_{n+1} Personen, so zahlen diese $a_{n+1} . P$ Thaler, von denen der gegenwärtige Werth $\frac{a_{n+1} . P}{e}$ Thlr. ist. Bei entsprechender Bezeichnung betragen die gegenwärtigen Werthe aller nachfolgenden Prämienzahlungen $\frac{a_{n+2} . P}{e^2}$, $\frac{a_{n+3} . P}{e^3}$, u. s. f., mithin ist die Gesammtleistung aller Versicherten, wenn wir den gemeinschaftlichen Faktor P ausscheiden,

$$X = P\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right).$$

(Die Reihe bricht natürlich mit der Sterblichkeitstabelle ab.)

Untersuchen wir nun die Leistungen des Versicherungsinstituts, so hat letzteres an die im ersten Versicherungsjahre Gestorbenen am Ende dieses Jahres je 1 Thlr. zu bezahlen, d. i. in Summa $(a_n - a_{n+1})$ Thaler. Diese sind heute werth $\frac{a_n - a_{n+1}}{e}$ Thaler. In entsprechender Weise haben die nachfolgenden Zahlungen die gegenwärtigen Werthe

$$\frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{e^2}, \quad \frac{a_{n+2} - a_{n+3}}{e^3} + \ldots,$$

so dass die Gesammtleistung der Versicherungsbank gegenwärtig den Werth

$$Y = \frac{a_n - a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+2} - a_{n+3}}{e^3} + \ldots,$$

welche Reihe ebenfalls mit der Sterblichkeitstabelle abbricht. Soll auf beiden Seiten kein Nachtheil sein, so muss $X = Y$ sein; wir erhalten deshalb die Formel

$$P\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right) = \frac{a_n - a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{e^2} + \ldots (0)$$

Um die Berechnung des Werthes von *P* aus dieser Formel zu erleichtern, geben wir ihr noch eine etwas andere Form. Dividiren wir nämlich die einzelnen Glieder der Unterschiede auf der rechten Seite durch ihre Nenner und dividiren hierauf beide Seiten durch a_n, so erhalten wir, wie sich leicht übersehen lässt

$$P\left[1 + \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a_n}\left[\left(\frac{a_n}{e} + \frac{a_{n+1}}{e^2} + \ldots\right) - \left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e.a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right) - \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \cdot \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right)$$

oder endlich

$$P\left(1 + \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right)\right.$$

$$= \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{a_n} \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right) \ldots (P).$$

86. Beispiel.

Welche Prämie muss eine 32jährige Person jetzt gleich und künftig alljährlich bis zum Tode zahlen, um ihren Erben eine bei ihrem Ableben zahlbare Summe von 100 *Thlr. zu sichern?*

Mit Rücksicht auf (D) finden bei 4 % Zinsen in der Leibrententabelle auf pag. 122.

$$\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e}+\frac{a_{n+2}}{e^2}+\ldots\right)=16{,}535,$$

folglich geht unsere Formel (P) über in folgende:

$$P(1+16{,}535)=0{,}9615385-0{,}0384615\,.\,16{,}535$$

$$\text{oder}\quad P\,.\,17{,}535=0{,}9615385-0{,}63597$$

$$=0{,}32557,$$

$$\text{also}\quad P=\frac{0{,}32557}{17{,}535}=0{,}018586.$$

Bei einer Versicherung von 100 Thaler wäre demnach eine jährliche Prämie von 1,8586 Thlr. nöthig.

Nehmen wir 3 % Zinsen an, so haben wir nach den angezogenen Tabellen:

$$P(1+19{,}298)=0{,}9708738-0{,}0291262\,.\,19{,}298$$

$$=0{,}40879,$$

$$\text{also}\quad P=\frac{0{,}40879}{20{,}298}=0{,}02014.$$

Bei einer Versicherungssumme von 100 Thalern ist also eine jährliche Prämie von 2,014 Thaler = 2 Thlr. — Sgr. 6 Pf. nöthig. —

Zu der eben berechneten Prämie muss natürlich noch ein Verwaltungskostenaufschlag kommen.

Um auch für ausserordentliche Unglücksfälle gedeckt zu sein, nehmen die Versicherungsinstitute gewöhnlich auch einen anderweiten Aufschlag, lassen aber die Versicherten an dem hierdurch erzielten Gewinne mit participiren. — Wir theilen im Nachfolgenden die Prämiensätze verschiedener Versicherungsinstitute in aufsteigender Ordnung mit:

Vergleichende Tabelle der jährlichen Prämien zur Versicherung

Alter des Versicherten. Jahre.	Normal-Prämiensatz *). Rc. Sgl. Sg.	Medical, Invalid and General Life Assurance Society in London. Rc. Sgl. Sg.	Janus in Hamburg. Rc. Sgl. Sg.	Frankfurter Lebensversicherungs-Gesellschaft. Rc. Sgl. Sg.	Crown Life Assurance Company in London. Rc. Sgl. Sg.
21	1 24 4.	1 27 6**)	1 29 3.	2 — 4.	2 1 3.
22	1 25 7.	1 28 11.	2 — 9.	2 1 9.	2 2 8.
23	1 26 10.	2 — 3.	2 2 3.	2 3 4.	2 4 2.
24	1 28 3.	2 1 9.	2 4 —	2 4 9.	2 5 8.
25	1 29 9.	2 3 2.	2 5 9.	2 4 6.	2 7 3.
26	2 1 4.	2 4 8.	2 7 6.	2 7 9.	2 8 9.
27	2 2 11.	2 6 3.	2 9 3.	2 9 8.	2 10 5.
28	2 4 6.	2 7 9.	2 11 —	2 11 —	2 12 2.
29	2 6 3.	2 9 5.	2 13 —	2 13 —	2 13 9.
30	2 8 2.	2 11 2.	2 15 —	2 14 9.	2 15 6.
31	2 10 3.	2 13 —	2 17 —	2 16 9.	2 17 3.
32	2 12 7.	2 14 11.	2 19 —	2 18 8.	2 19 2.
33	2 15 1.	2 16 11.	2 21 —	2 20 9.	2 21 —
34	2 17 9.	2 19 —	2 23 3.	2 22 9.	2 23 —
35	2 20 8.	2 21 3.	2 25 9.	2 25 —	2 25 2.
36	2 23 8.	2 23 8.	2 28 3.	2 27 4.	2 27 3.
37	2 26 10.	2 26 —	3 — 9.	3 — —	2 29 9.
38	3 — 2.	2 28 9.	3 3 6.	3 2 9.	3 1 9.
39	3 1 8.	3 1 5.	3 6 6.	3 5 6.	3 4 3.
40	3 7 3.	3 4 3.	3 9 6.	3 8 6.	3 6 11.
41	3 10 11.	3 7 3.	3 12 6.	3 11 6.	3 9 8.
42	3 14 10.	3 10 6.	3 15 6.	3 14 9.	3 12 6.
43	3 18 11.	3 13 9.	3 18 6.	3 18 4.	3 15 9.
44	3 23 2.	3 17 5.	3 22 —	3 22 3.	3 19 —
45	3 27 8.	3 21 2.	3 25 6.	3 26 —	3 22 6.
46	4 2 4.	3 25 2.	3 29 3.	4 — 4.	3 26 3.
47	4 7 3.	3 29 3.	4 3 6.	4 4 6.	4 — 2.
48	4 12 6.	4 3 9.	4 8 —	4 9 4.	4 4 5.
49	4 17 11.	4 8 5.	4 13 —	4 14 6.	4 8 9.
50	4 23 10.	4 13 5.	4 18 6.	4 19 6.	4 13 5.

*) Diese Prämien sind nach der Sterblichkeitstafel für Sachsen (vergl. Dr. Heym, die Grabekassen. Leipz. 1850.) mit 3 % berechnet.

**) Nach der in England gewöhnlich gebrauchten Northamptoner Sterblichkeitstafel ergiebt die Berechnung der jährlichen Prämie für eine 21jährige Person bei 3 % Zinsen 2 Thlr. 6 Sgr. 9 Pf. Es ist nämlich in England die Sterblich-

von 100 *Thalern zahlbar beim Tode des Versicherten.*

Alter des Versicherten.	Gothaer Lebensversicherungsbank.			Leipziger Lebensversicherungs-Gesellschaft.			Londoner Union Assecuranz-Gesellschaft.			Berlinische Lebensversicherungs-Gesellschaft.			Deutsche Lebensversicherungs-Gesellschaft in Lübeck.		
Jahre.	Rt.	Sgl	Pf.	Rt.	Sgl	Pf.	Rt.	Sgl	Pf.	Rt.	Sgl	Pf.	Rt.	Sgl	Pf.
21	2	4	5.	2	4	5.	2	6	9.	2	6	9.	2	6	9.
22	2	6	—	2	6	1.	2	7	11.	2	8	—	2	8	—
23	2	7	6.	2	7	6.	2	9	5.	2	9	5.	2	9	4.
24	2	9	—	2	8	11.	2	10	6.	2	10	8.	2	10	8.
25	2	10	8.	2	10	8.	2	12	—	2	12	2.	2	12	1.
26	2	12	3.	2	12	4.	2	13	6.	2	13	8.	2	13	7.
27	2	13	10.	2	13	11.	2	15	—	2	15	2.	2	15	—
28	2	15	6.	2	15	7.	2	16	6.	2	16	8.	2	16	8.
29	2	17	2.	2	17	3.	2	18	5.	2	18	5.	2	18	4.
30	2	19	—	2	19	—	2	19	11.	2	20	2.	2	20	1.
31	2	20	11.	2	21	—	2	21	9.	2	21	11.	2	21	10.
32	2	22	11.	2	22	11.	2	23	8.	2	23	8.	2	23	8.
33	2	24	11.	2	24	11.	2	25	6.	2	25	8.	2	25	7.
34	2	26	11.	2	26	11.	2	27	9.	2	27	8.	2	27	8.
35	2	29	1.	2	29	1.	2	29	8.	2	29	9.	2	29	9.
36	3	1	4.	3	1	5.	3	1	11.	3	2	—	3	2	—
37	3	3	8.	3	3	8.	3	4	2.	3	4	3.	3	4	3.
38	3	6	2.	3	6	2.	3	6	9.	3	6	9.	3	6	8.
39	3	8	9.	3	8	9.	3	9	5.	3	9	3.	3	9	3.
40	3	11	7.	3	11	7.	3	12	—	3	12	—	3	12	—
41	3	14	7.	3	14	7.	3	14	8.	3	14	8.	3	14	8.
42	3	17	10.	3	17	10.	3	17	8.	3	17	6.	3	17	6.
43	3	21	3.	3	21	3.	3	20	8.	3	20	6.	3	20	6.
44	3	24	10.	3	24	10.	3	23	8.	3	23	8.	3	23	7.
45	3	28	10.	3	28	11.	3	27	—	3	27	—	3	26	10.
46	4	3	—	4	3	1.	4	—	5.	4	—	4.	4	—	3.
47	4	7	5.	4	7	5.	4	3	9.	4	3	11.	4	3	11.
48	4	12	—	4	12	—	4	7	6.	4	7	8.	4	7	8.
49	4	16	11.	4	16	11.	4	10	8.	4	11	9.	4	11	9.
50	4	22	—	4	22	—	4	16	2.	4	16	—	4	15	11.

keit bedeutender als in Deutschland, indem z. B. die mittlere Lebensdauer einer 20jährigen Person in England bis zum 53., in Deutschland hingegen bis zum 57. Lebensjahre reicht. Es steht deshalb dahin, ob die Medical etc. Society bei ihrem niedrigen Prämiensatze, der 9 Sgr. 3 Pfg. unter dem englischen Normalsatze steht, auf die Dauer wird bestehen können?

B. *Bei Zahlung in einer Summe.*

Wird gefragt, welche Summe eine Person von n Jahren sofort zu erlegen hat, um ihren Erben bei ihrem Tode ein Kapital von 1 Thlr. zu sichern, so ist die baare Leistung des Versicherten eben die Summe S, hingegen die Leistung der Bank, wie man leicht erkennen wird, der $a_n$te Theil von dem früherem Y, so haben wir also hier als Berechnungsformel

$$S = \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_n - a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)$$

oder

$$S = \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{a_n} \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right) \ldots (Q).$$

87. Beispiel.

Welche Summe muss eine 32*jährige Person sogleich erlegen, um ihren Erben beim Ableben* 100 *Thlr. zu sichern?*

Aus dem 86sten Beispiele ersehen wir, dass für einen Thaler bei 4% $S = 0{,}32557$ und bei 3% $= 0{,}40879$ ist. Bei einer Versicherungssumme von 100 Thlr. beträgt also die Summe bezüglich 32,557 und 40,879.

Anmerkung. Unter den obenerwähnten Verhältnissen nimmt

die Medical etc. Society	43	Thlr.	22	Sgr.	2	Pf.,
der Janus in Hamburg	44	„	7	„	6	„
die Lübecker Bank	48	„	28	„	10	„

Mit Rücksicht auf die 2te Note pag. 138. bemerken wir, dass diese Summe nach der Northamptoner Sterblichkeitstafel 48 Thlr. 27 Sgr. 5 Pf. beträgt.

C. *Schlussbemerkungen.*

Man hat auch Versicherungen verbundener Leben unter den vielfachsten Modalitäten, z. B. Versicherung von Hundert Thalern, zahlbar beim Tode der Person A, im Fall die Person B noch am Leben ist; Versicherung von Hundert Thalern zahlbar beim Tode des von zwei Personen Zuletztsterbenden, u. s. w. Was die hierauf bezüglichen Rechnungen

betrifft, so ist auch hier die Leistung jeder Partei nach dem baaren Werthe zu ermitteln, wobei die anzuwendenden Wahrscheinlichkeits-Coefficienten je nach den gestellten Bedingungen zu wählen sind. Wir begnügen uns hier, auf die analogen Fälle bei den Leibrenten zu verweisen.

Es giebt ferner Versicherungen, bei welchen die Prämien blos bis zu einer bestimmten Zeit, oder auch die Versicherungssummen zu einer festgesetzten Zeit gezahlt werden. Es wird in Bezug darauf die Bemerkung genügen, dass in diesen Fällen die Reihen der Berechnungsformel nicht erst mit der Sterblichkeitstabelle, sondern eben mit jenen festgesetzten Zeitabschnitten abbrechen.

Noch ein Wort möge über die zweite Ueberschrift unseres Paragraphen „Sterbekassen“ gesagt werden. Diese können nämlich, wenn sie vernünftig eingerichtet sind, auf gar keinen anderen Prinzipien beruhen, als die Lebensversicherungsinstitute. Sie sind nur dadurch ein Bedürfniss geworden, dass die Lebensversicherungsbanken die Versicherung kleiner Summen meist nicht zulassen. Der Janus in Hamburg allein lässt auch eine Versicherung von 50 Thlr. zu, die z. B. bei einer 26jährigen Person durch einen, sage einen täglich zurückgelegten Pfennig erworben werden kann.

Welche Sterbekasse kann diese Vortheile gewähren? Nach unserer festen Ueberzeugung ist aber nicht blos um der geringen Beiträge, sondern auch um der grösseren Sicherheit willen eine Lebensversicherungsbank stets vorzuziehen. Es ist nämlich bei den, natürlich doch nur immer einen kleinen Umfang habenden, Sterbekassen viel eher zu fürchten, dass eine Abweichung der Sterblichkeitsverhältnisse einer Stadt von der angewandten Sterblichkeitstabelle die Kasse in Gefahr bringe, als dies bei den, eine grosse Mitgliederzahl aus den verschiedensten Gegenden und Ortschaften umfassenden, Lebensversicherungsbanken der Fall ist.

Nachtrag.

A. Die wichtigsten Sätze über Logarithmen.

1. *Unter dem Logarithmus einer Zahl* a *für die Grundzahl* 10, *verstehen wir den Exponenten, auf welchen man* 10 *erheben muss, um jene Zahl* a *zu erhalten.*

Bezeichnet z. B. x den Logarithmus von a, oder nach kurzer Schreibweise, ist $\log a = x$, so ist $10^x = a$. Es ist deshalb $\log 1000 = 3$, weil $10^3 = 1000$ und $\log 1 = 0$, weil $10^0 = 1$ ist.

2. *Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Posten.*

Es ist z. B. $\log a \,.\, b = \log a + \log b$. Nach diesem Satze kann man z. B. für $\log 12$ auch $\log 3 + \log 4$, oder auch $\log 2 + \log 6$ setzen. Ebenso ist $\log a \,.\, b \,.\, c = \log a + \log b + \log c$, u. s. f.

3. *Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Unterschiede aus den Logarithmen der einzelnen Glieder.*

So ist $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log \frac{13,5}{9,7} = \log 13,5 - \log 9,7$.

4. *Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Grundzahl multiplicirt mit dem Potenzexponenten.*

So ist $\log a^m = m \,.\, \log a$; $\log 2^5 = 5 \log 2$; $\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3$.

5. *Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicanden dividirt durch den Wurzelexponenten.*

So ist $\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$ oder $= \frac{1}{n} . \log a$; $\log \sqrt[5]{32}$ $= \frac{1}{5} . \log 32$, (und $\log 32 = 5 . \log 2$ ist,) $= \frac{1}{5} . 5 \log 2 = \log 2$; $\log \sqrt[2]{5,73} = \frac{1}{2} . \log 5,73$.

Da nach 1. der $\log 100 = 2$, und der $\log 1000 = 3$ ist, so liegt auf der Hand, dass die Logarithmen aller Zahlen zwischen 100 und 1000 gleich 2 vermehrt um einen ächten Bruch sind. Da ferner $\log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2$, ferner $\log \frac{1}{1000} = \log 1 - \log 1000 = 0 - 3 = -3$ ist, so liegen die Logarithmen aller Brüche zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$ zwischen -2 und -3, und es ist deshalb z. B. $\log \frac{1}{250} = -3$ vermehrt um einen ächten Bruch.

6. *Die zu einem Logarithmus gehörige ganze (positive oder negative) Zahl heisst die Charakteristik oder die Kennziffer, hingegen der hinzu zu addirende ächte Bruch, die Mantisse.*

7. *Nennen wir die in dem Dezimalbruche*

$$\overset{+3}{9}\ \overset{+2}{5}\ \overset{+1}{3}\ \overset{0}{2},\ \overset{-1}{4}\ \overset{-2}{6}\ \overset{-3}{7}\ \overset{-4}{8}$$

über den einzelnen Ziffern stehenden Zeiger die Stellenzahlen der einzelnen Ziffern, so bekommen wir zur Bestimmung der Kennziffer eines Logarithmen folgende Regel:

Die Kennziffer des Logarithmus einer Zahl ist gleich der Stellenzahl der höchsten geltenden Ziffer jener Zahl.

So ist $\log 32,75 = 1, \ldots$, $\log 3,275 = 0, \ldots$, $\log 0,03275 = -2 +$ ächter Bruch.

8. *Ist die Kennziffer negativ, so wird die, stets positive, Mantisse vorweg und die Kennziffer nachgesetzt.*

Es ist also $\log 0,03275 = 0, \ldots . - 2$.

9. *Alle Zahlen, die sich blos durch die Stelle des Kommas unterscheiden, haben ein und dieselbe Mantisse und unterscheiden sich also nur durch die Kennziffer.*

B. Aufschlagen der Logarithmen auf Tafel VI.

Auf dieser Tafel befinden sich in den beiden mit *N* überschriebenen Spalten alle Zahlen von 10 bis 99 und unmittelbar daneben in der mit 0 überschriebenen Spalte die zu jeder Zahl gehörige Mantisse, so dass man mittelst dieser beiden Spalten schon die Logarithmen aller zweiziffrigen Zahlen finden kann. Suche ich z. B. den Logarithmus der Zahl 35, so bestimme ich zuerst deren Kennziffer, diese ist 1, und hänge dann rechts an diese gleich die zugehörige Mantisse, d. h. also die neben der Zahl 35 in der Null-Spalte stehende Zahl 5441 an, so dass ich also erhalte

$$\log 35 = 1{,}5441.$$

Ebenso verfahre ich, wenn die Zahl, deren Logarithmus ich suche, nur in den beiden ersten Stellen geltende Ziffern, in den nachfolgenden aber Nullen hat. Suche ich z. B. den Logarithmus von 87000, so ist die Kennziffer 4, und ich habe an diese nur die neben der Zahl 87 in der Null-Spalte stehende Mantisse 9395 anzuhängen, so dass ich also erhalte

$$\log 87000 = 4{,}9395.$$

Endlich reichen auch die erwähnten Spalten aus, wenn die Zahl, deren Logarithmus ich suche, nur in den beiden letzten Stellen geltende Ziffern, vorher aber Nullen hat. Suche ich z. B. den Logarithmus von 0,00059, so setze ich zunächst in die Stelle der Einer, weil die Kennziffer -5, also negativ ist, 0 mit dem Komma und in einiger Entfernung rechts davon die negative Kennziffer, nämlich:

$$0, \qquad -5 \ ;$$

dann suche ich die neben 59 stehende Mantisse 7709 auf und hänge dieselbe an die 0 mit dem Komma an, wodurch ich dann erhalte

$$\log 0{,}00059 = 0{,}7709 - 5.$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass auch die Logarithmen aller einziffrigen Zahlen mittelst der ersten beiden Spalten gefunden werden können, da die Zahlen 1, 2, 3... bis 9 mit den Zahlen 10, 20, 30, bis 90 bezüglich gleiche Mantissen haben.

Ist die Zahl, deren Logarithmus man finden will, dreiziffrig, so suche man zuerst die beiden ersten Ziffern in der mit *N* überschriebenen Spalte auf und setze an die vorher niedergeschriebene Kennziffer die erste abgesonderte Ziffer der Nullspalte als Zehntel daran. Die drei übrigen Ziffern findet man, wenn man in derselben Horizontalreihe fortgeht, bis man zu der Vertikalspalte kommt, die mit der noch nicht berücksichtigten Ziffer der gegebenen Zahl überschrieben ist. Soll z. B. log 357 gefunden werden, so ist die Kennziffer 2, und die neben 35 stehende abgesonderte Ziffer ist 5, so dass man vorläufig 2,5.. hat. Die drei folgenden Ziffern findet man in derselben Horizontalreihe in der mit 7 überschriebenen Spalte, wo sich nämlich die Zahlen 527 finden, so dass man vollständig

$$\log 357 = 2{,}5527$$

hat.

Man wird bemerken, dass einzelne der Gruppen von je drei Ziffern mit einem Sternchen (*) behaftet sind. Ist dies der Fall, so ist statt der einzelnstehenden Ziffer der Null-Spalte, die darauf folgende, d. h. immer die um 1 höhere zu nehmen. Sucht man z. B. den log 7,96, so ist die Kennziffer 0 und es hat die Zahl 79 die einzelnstehende Ziffer 8 neben sich. Da aber die zu 6 gehörigen übrigen Ziffern, nämlich 009, mit einem Sternchen behaftet sind, so ist statt 8 die Zahl 9 zu nehmen, und man hat

$$\log 7{,}96 = 0{,}9009.$$

Ist die Zahl, deren Logarithmus gefunden werden soll, vierziffrig, so lasse man die vierte Ziffer vorläufig unberücksichtigt und suche den Logarithmus für die drei ersten ganz so, wie vorher angegeben wurde und schreibe denselben nieder. Ist z. B. log 5738 zu finden, so ist die Kennziffer 3, und die Mantisse zu log 573 ist 7582, folglich hat man zunächst 3,7582. Dies ist aber nur der Logarithmus von 5730, während der folgende in den Tafeln noch zu findende, nämlich 3,7589 der Logarithmus von 5740 ist. Die beiden Logarithmen unterscheiden sich nur um 7 Einheiten, während die Zahlen, zu denen sie gehören, sich um 10 Einheiten un-

terscheiden; es ist deshalb zu deren Logarithmus 3,7582 für jede der letzteren Einheiten $\frac{7}{10}$ oder 0,7 hinzuzunehmen, mithin für 8 Einheiten $8.0{,}7 = 5{,}6$. Da $\frac{6}{10}$ mehr als eine halbe Einheit beträgt, so wird man statt 5,6 die ganze Zahl 6 zu dem vorigen Logarithmus addiren, wodurch man erhält

$$\log 5738 = 3{,}7588.$$

Fassen wir das so eben detaillirte Verfahren in eine kurze Regel, so lautet diese so:

Beim Aufschlagen des Logarithmus einer 4ziffrigen Zahl suche man den Logarithmus für die drei ersten Ziffern und schreibe diesen nieder. Hierauf suche man die Differenz zwischen diesem Logarithmus und dem nächsten in der Tafel stehenden, nehme davon den 10ten Theil, multiplicire diesen mit der noch nicht berücksichtigten vierten Ziffer der gegebenen Zahl und addire die Ganzen dieses Produkts zu dem niedergeschriebenen Logarithmus.

In der mit *D.* 1. überschriebenen Spalte findet sich hinter jeder Querreihe die Differenz zwischen der letzten Mantisse dieser Reihe und der ersten der darauf folgenden Reihe verzeichnet. Diese Differenz gilt nun zwar nicht für die ganze Reihe, allein die übrigen Differenzen unterscheiden sich allermeist nur in der letzten Ziffer von der verzeichneten und es wird im Hinblick auf die verzeichnete Differenz schon die Subtraktion der letzten Ziffern zweier auf einander folgenden Mantissen genügen, um gleich die ganze Differenz zu erkennen. Um zu verhüten, dass etwa die Division dieser Differenz durch 10 übersehen werde, ist auch diese an den verzeichneten Differenzen durch Abschneiden der letzten Ziffer durch ein Komma bereits ausgeführt worden. Nehmen wir noch ein Beispiel und suchen z. B. $\log 2447$, so finden wir zunächst $\log 2440 = 3{,}3874$. Um die Tafeldifferenz zu finden, haben wir 874 von 892 abzuziehen. Da 4 von 12 die Zahl 8 giebt, so sehen wir an der in der Spalte *D.* 1. verzeichneten Differenz 1,7 sofort, dass hier 18 die Differenz ist; wir haben also $1{,}8.7 = 12{,}6$, d. i. 13 Ganze zu 3,3874 hinzuzunehmen und erhalten so $\log 2447 = 3{,}3887$.

Ist der Logarithmus von einer 5ziffrigen Zahl zu nehmen, z. B. log 12437, so suche man wieder zuerst den Logarithmus der drei ersten Ziffern, also log 12400 = 4, 0934, multiplicire die Tafeldifferenz, 35, mit den beiden nicht berücksichtigten Ziffern, d. i. mit 37, also 35.37 = 1295 und dividire das erhaltene Produkt jetzt durch 100. Dies giebt hier also 12,95, wovon die Ganzen, d. i. 13 nach dem vorigen Logarithmus 4, 0934 zuzuzählen sind. Man erhält somit log 12437 = 4,0947.

Bei 6 und mehrziffrigen Zahlen haben nach unseren Tafeln die auf die 5te Stelle folgenden Ziffern keinen Einfluss mehr.

C. Aufsuchen der zu einem gegebenen Logarithmus gehörigen Zahl mittelst der Taf. VI.

Ist ein Logarithmus gegeben und soll die dazu gehörige Zahl gefunden werden, so hat man vor Allem zu bedenken, dass die Kennziffer nicht mit in der Tafel steht, also dort auch nicht aufgesucht werden kann. Man wird also die Mantisse blos aufzusuchen haben und zwar deren erste Ziffer unter den einzeln stehenden Ziffern der Null-Spalte, die übrigen Ziffern aber unter den dazu gehörigen Gruppen von je drei Ziffern. Es versteht sich, dass der gegebene Logarithmus vorher erst auf 4 Bruchziffern gekürzt werden muss. Ist z. B. log x = 1,5832 gegeben und wird x gesucht, so finden wir die erste Ziffer 5 der Mantisse in der Null-Spalte und die übrigen 832 in der zur Zahl 38 gehörigen Querspalte unter der Ziffer 3. Es gehört also die gegebene Mantisse zu der Zahl 383. Wie nun beim Aufschlagen des Logarithmus einer Zahl die Stelle des Komma's die Kennziffer bestimmt, so muss hier auch wieder die Stelle des Komma's in der gefundenen Zahl durch die Kennziffer des gegebenen Logarithmus bestimmt werden. Wir hatten die Regel gegeben: Die Kennziffer ist gleich der Stellenzahl der höchsten geltenden Ziffer, folglich sehen wir, dass die höchste geltende Ziffer unserer gefundenen Zahl die Kennziffer zur Stellenzahl bekommen muss. In unserer Zahl 383 muss also die erste

3 die Stellenzahl 1 bekommen, d. h. diese 3 steht in der Stelle der Zehner, es kommt also das Komma hinter die 8, und wir haben

$$1{,}5832 = \log 38{,}3.$$

Wäre ferner $\log x = 0{,}4082 - 2$, so findet man in der Nullspalte neben der ersten 4 schon die Gruppe 150, also mehr als 082, deshalb muss in die vorhergehende Zeile, aus welcher die besternten Zahlgruppen noch zu 4 gehören, zurückgegangen werden. Hier findet man 082 in der mit 6 überschriebenen Spalte, es gehört somit zur Mantisse 4082 die Zahl 256. In dieser ist nun noch das Komma durch die Kennziffer -2 zu bestimmen, indem die höchste geltende Ziffer 2 jene -2 zur Stellenzahl erhalten, d. h. in die Stelle der Hundertel kommen muss. Wir erhalten demnach

$$x = 0{,}0256.$$

Wäre $\log x = 2{,}5382$, so findet sich in der Tafel unter den zu 5 gehörigen Gruppen keine, welche gleich 382 ist. In diesem Falle nehme man die nächst kleinere, d. i. 378 und schreibe sich vorläufig die Zahl 345, die zur Mantisse 5378 gehört, nieder. Hierauf ziehe man die gefundene Mantisse 378 von der gesuchten 382 ab und dividire diesen Unterschied $382 - 378 = 4$ durch den 10ten Theil der Tafeldifferenz $\frac{391 - 378}{10} = 1{,}3$. Wir erhalten dann $\frac{4}{1{,}3} = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{3}$. Die ganze Zahl 3 dieses Quotienten wird hierauf noch an die vorher gefundene Zahl 345 angehängt und in der nun erhaltenen Zahl 3453 das Komma aus der Kennziffer 2 wie vorher bestimmt. Wir erhalten somit

$$x = 345{,}3.$$

D. Anderweite Regeln beim Rechnen mit Logarithmen.

1) Hat man Logarithmen von Quotienten zu nehmen, so wird nach der früheren Regel der Logarithmus des Divisors (Nenners) von dem Logarithmus des Dividenden (Zählers)

subtrahirt. Ist der Quotient ein ächter Bruch, z. B. $\frac{378}{523}$, so hat man

$$\log \frac{378}{523} = \log 378 - \log 523$$
$$= 2{,}5775 - 2{,}7185.$$

Würde man diese Division ausführen, so würde man einen negativen Werth bekommen, zu welchem man mittelst unserer Tafel die zugehörige Zahl deshalb nicht finden würde, weil negative Mantissen in den Tafeln nicht stehen. Man hat deshalb die negativen Mantissen zu vermeiden, was dadnrch geschieht, dass man das Negative in die Kennziffer bringt. — Man hat nämlich die Kennziffer des Logarithmen vom Zähler um soviel Einheiten zu vermehren, dass die Subtraktion ausführbar wird, später dem Reste die zugezählten Einheiten als negative Kennziffer wieder beizugeben. In unserem obigen Beispiele würden wir also statt 2,5775 jetzt 3,5775 nehmen, dann haben wir $3{,}5775 - 2{,}7185 = 0{,}8590$. Die zugezählte Einheit bringen wir jetzt wieder durch Hinzufügung von -1 in Abzug und haben deshalb

$$\log \frac{378}{523} = 0{,}8590 - 1.$$

Für den der mathematischen Sätze von der Subtraktion weniger Kundigen möge an einem Beispiele das Verfahren bei der Subtraktion zweier Dezimalbrüche, von denen der Subtrahend oder beide Glieder negative Kennziffern haben, noch erläutert werden. Ist z. B. folgende Subtraktion

$$\begin{array}{r} 0{,}8572 - 1 \\ 0{,}5283 - 2 \\ \hline \end{array}$$

auszuführen, so gebe man hier im Minuend vorn eine Einheit zu und nehme sie aber auch hinten wieder weg, damit beide Dezimalbrüche dieselbe Kennziffer haben, und subtrahire nun so:

$$\begin{array}{r} 1{,}8572 - 2 \\ 0{,}5283 - 2 \\ \hline 1{,}3279. \end{array}$$

Da nämlich jetzt von beiden Gliedern der Differenz gleich viel

wegzunehmen ist, so haben die Kennziffern keinen Einfluss mehr auf die Grösse des Unterschiedes. Wäre

$$0,8572$$
$$0,5283 - 2$$

zu subtrahiren, so setze man an:

$$2,8572 - 2$$
$$0,5283 - 2,$$

wodurch man $2,3279$ erhält.

2) Hat man Logarithmen von Wurzelausdrücken zu nehmen, so muss nach der früheren Regel der Logarithmus des Radicanden (d. i. der Zahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen ist), durch den Wurzelexponenten dividirt werden. — Wäre z. B. $\log \sqrt[7]{0,007345}$ zu suchen, so findet man

$$\log 0,007345 = 0,8660 - 3,$$

und mithin

$$\log \sqrt[7]{0,007345} = \frac{0,8660 - 3}{7}.$$

Hier ist nun jedes Glied der Differenz im Zähler durch 7 zu dividiren; dies würde aber die Kennziffer $= \frac{3}{7}$ geben. — Eine solche Kennziffer hat aber keinen Sinn, weil ja die Kennziffer gleich der Stellenzahl der höchsten geltenden Ziffer, d. h. also immer eine ganze Zahl sein muss. Um deshalb eine ganze Zahl als Kennziffer zu erhalten, hat man in dem Zähler $0,8660 - 3$ vorn so viel Einheiten zuzuzählen und hinten wieder in Abzug zu bringen, dass die dadurch entstehende Kennziffer durch 7 dividirt eine ganze Zahl giebt. Man wird also erhalten

$$\frac{4,8660 - 7}{7} = 0,6951 - 1.$$

Berichtigungen.

S. 20. Z. 21. ist aus Versehen C = 2 Thlr. 20 Sgr. statt C = 3 Thlr. 20 Sgr. gesetzt worden und es passt deshalb die Ausrechnung nicht zur Aufgabe. Der richtige Ansatz ist

$$100 = \frac{11}{3} \cdot \frac{e\,(e^{18}-1)}{e-1} \text{ oder } 27{,}27\ldots = \frac{e\,(e^{18}-1)}{e-1.}$$

Sucht man 27,27... in der zu 18 Jahren gehörigen Querspalte der Taf. III., so findet man 26,67 ... bei 4 % und 28,06... bei $4\frac{1}{2}$ %. Der gesuchte Zinsfuss ist demnach c. $4\frac{1}{4}$ %.

S. 94. muss die Formel (f) heissen:

$$1 - \left(1 - \frac{a_{n+k}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+k}}{a_p}\right) \text{ und}$$

S. 95. muss die Formel (e) heissen:

$$\left(1 - \frac{a_{n+k}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+k}}{a_p}\right).$$

S. 131. ist der Name „Dannenberger“ in „Dannenberg“ zu ändern.

Ebendas. gehört zum Alter von 73 Jahren die Rente 5,49284, nicht 4,49284.

Durch ein Versehen ist die zweite Hälfte der Taf. I. auf die Rückseite der ersten gedruckt worden. Um nun denen, die viel mit den Tabellen zu rechnen haben, es möglich zu machen, sich dieselben auf Pappe ziehen zu lassen, ist die erwähnte zweite Hälfte noch einmal besonders gedruckt worden.

Druck von W. Plötz in Halle.

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
1	1,01	1,045	1,05	1,06	1,07	1
2	1,0201	1,092025	1,1025	1,1236	1,1449	2
3	1,030301	1,141166	1,157625	1,191016	1,225043	3
4	1,040604	1,192519	1,215506	1,262477	1,310796	4
5	1,051010	1,246182	1,276282	1,338226	1,402552	5
6	1,061520	1,302260	1,340096	1,418519	1,500730	6
7	1,072135	1,360862	1,407100	1,503630	1,605781	7
8	1,082856	1,422101	1,477455	1,593848	1,718186	8
9	1,093685	1,486095	1,551328	1,689479	1,838459	9
10	1,104622	1,552969	1,628895	1,790848	1,967151	10
11	1,115666	1,622853	1,710339	1,898299	2,104852	11
12	1,126825	1,695881	1,795856	2,012196	2,252192	12
13	1,138093	1,772196	1,885649	2,132928	2,409845	13
14	1,149474	1,851945	1,979932	2,260904	2,578534	14
15	1,160969	1,935282	2,078928	2,396558	2,759032	15
16	1,172579	2,022370	2,182875	2,540352	2,952164	16
17	1,184304	2,113377	2,292018	2,692773	3,158815	17
18	1,196147	2,208479	2,406619	2,854339	3,379932	18
19	1,208109	2,307860	2,526950	3,025600	3,616528	19
20	1,220190	2,411714	2,653298	3,207135	3,869684	20
21	1,232392	2,520241	2,785963	3,399564	4,140562	21
22	1,244716	2,633652	2,925261	3,603537	4,430402	22
23	1,257163	2,752166	3,071524	3,819750	4,740530	23
24	1,269735	2,876014	3,225100	4,048935	5,072367	24
25	1,282432	3,005434	3,386355	4,291871	5,427433	25
26	1,295256	3,140679	3,555673	4,549383	5,807353	26
27	1,308209	3,282010	3,733456	4,822346	6,213868	27
28	1,321291	3,429700	3,920129	5,111687	6,648838	28
29	1,334504	3,584036	4,116136	5,418388	7,114257	29
30	1,347849	3,745318	4,321942	5,743491	7,612255	30
31	1,361327	3,913857	4,538039	6,088101	8,145113	31
32	1,374941	4,089981	4,764941	6,453387	8,715271	32
33	1,388690	4,274030	5,003189	6,840590	9,325340	33
34	1,402577	4,466362	5,253348	7,251025	9,978114	34
35	1,416603	4,667348	5,516015	7,686087	10,676581	35
36	1,430769	4,877378	5,791816	8,147252	11,423942	36
37	1,445076	5,096860	6,081407	8,636087	12,223618	37
38	1,459527	5,326219	6,385477	9,154252	13,079271	38
39	1,474123	5,565899	6,704751	9,703507	13,994820	39
40	1,488864	5,816365	7,039989	10,285718	14,974458	40
41	1,503753	6,078101	7,391988	10,902861	16,022670	41
42	1,518791	6,351615	7,761588	11,557033	17,144257	42
43	1,533978	6,637438	8,149667	12,250455	18,344355	43
44	1,549318	6,936123	8,557150	12,985482	19,628460	44
45	1,564811	7,248248	8,985008	13,764611	21,002452	45
46	1,580459	7,574420	9,434258	14,590487	22,472623	46
47	1,596263	7,915268	9,905971	15,465917	24,045707	47
48	1,612226	8,271456	10,401270	16,393872	25,728907	48
49	1,628348	8,643671	10,921333	17,377504	27,529930	49
50	1,644632	9,032636	11,467400	18,420154	29,457025	50

I.

Jal	4 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
5	7,390951	9,439105	12,040770	19,525364	31,519017	51
5	7,686589	9,863865	12,642808	20,696885	33,725348	52
5	7,994052	10,307739	13,274949	21,938698	36,086122	53
5	8,313814	10,771587	13,938696	23,255020	38,612151	54
5	8,646367	11,256308	14,635631	24,650322	41,315001	55
5	8,992222	11,762842	15,367412	26,129341	44,207052	56
5	9,351910	12,292170	16,135783	27,697101	47,301545	57
5	9,725987	12,845318	16,942572	29,358927	50,612653	58
5	10,115026	13,423357	17,789701	31,120463	54,155539	59
6	10,519627	14,027408	18.679186	32,987691	57,946427	60
6	10,940413	14,658641	19,613145	34,966952	62,002677	61
6	11,378029	15,318280	20,593802	37,064969	66,342864	62
6	11,833150	16,007603	21,623493	39,288868	70,986865	63
6	12,306476	16,727945	22,704667	41,646200	75,955945	64
6	12,798735	17,480702	23,839901	44,144972	81,272861	65
6	13,310685	18,267334	25,031896	46,793700	86,961962	66
6	13,843112	19,089364	26,283490	49,601290	93,049299	67
6	14,396836	19,948385	27,597665	52,577368	99,562750	68
6	14,972710	20,846063	28,977548	55,732010	106,532142	69
6	15,571618	21,784136	30,426426	59,075930	113,989392	70
7	16,194483	22,764422	31,947747	62,620486	121,968650	71
7	16,842262	23,788821	33,545134	66,387715	130,506455	72
7	17,515953	24,859318	35,222391	70,360378	139,641907	73
7	18,216591	25,977987	36,983510	74,582001	149,416840	74
7	18,945255	27,146996	38,832686	79,056921	159,876019	75
7	19,703065	28,368611	40,774320	83,800336	171,067341	76
7	20,491187	29,645199	42,813036	88,828356	183,042055	77
7	21,310835	30,979233	44,953688	94,158058	195,854998	78
7	22,163268	32,373298	47,201372	99,807541	209,564848	79
7	23,049799	33,830096	49,561441	105,795993	224,234388	80
7	23,971791	35,352451	52,039513	112,143753	239,930795	81
7	24,930663	36,943311	54,641489	118,872378	256,725950	82
7	25,927889	38,605760	57,373563	126,004721	274,696766	83
7	26,965005	40,343019	60,242241	133,565004	293,925541	84
7	28,043605	42,158455	63,254353	141,578904	314,500328	85
7	29,165349	44,055586	66,417071	150,073639	336,515351	86
7	30,331963	46,038087	69,737925	159,078057	360,071426	87
7	31,545242	48,109801	73,224821	168,622741	385,276426	88
7	32,807051	50,274742	76.886062	178,740105	412,245776	89
7	34,119333	52,537105	80,730365	189,464511	441,102980	90
7	35,484107	54,901275	84,766883	200,832382	471,980188	91
7	36,903471	57,371832	89,005227	212,882325	505,018802	92
7	38,379610	59,953565	93,455489	225,655264	540,370118	93
7	39,914794	62,651475	98,128263	239,194580	578,196026	94
7	41,511386	65,470792	103,034676	253,546255	618,669748	95
7	43,171841	68,416977	108,186410	268,759030	661,976630	96
7	44,898715	71,495741	113,595731	284,884572	708,314994	97
7	46,694664	74,713050	119,275517	301,977646	757,897044	98
7	48,562450	78,075137	125,239293	320,096305	810,949837	99
7	50,504948	81,588518	131,501258	339,302084	867,716326	100

Jahre.	1 %	1½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
51	1,6610	,439105	12,040770	19,525364	31,519017	51
52	1,6776	,863865	12,642808	20,696885	33,725348	52
53	1,6944	,307739	13,274949	21,938698	36,086122	53
54	1,7114	,771587	13,938696	23,255020	38,612151	54
55	1,7285	,256308	14,635631	24,650322	41,315001	55
56	1,7458	,762842	15,367412	26,129341	44,207052	56
57	1,7632	,292170	16,135783	27,697101	47,301545	57
58	1,7809	,845318	16,942572	29,358927	50,612653	58
59	1,7987	,423357	17,789701	31,120463	54,155539	59
60	1,8166	,027408	18.679186	32,987691	57,946427	60
61	1,8348	,658641	19,613145	34,966952	62,002677	61
62	1,8532	,318280	20,593802	37,064969	66,342864	62
63	1,8717	,007603	21,623493	39,288868	70,986865	63
64	1,8904	,727945	22,704667	41,646200	75,955945	64
65	1,9093	,480702	23,839901	44,144972	81,272861	65
66	1,9284	,267334	25,031896	46,793700	86,961962	66
67	1,9477	,089364	26,283490	49,601290	93,049299	67
68	1,9672	,948385	27,597665	52,577368	99,562750	68
69	1,9868	,846063	28,977548	55,732010	106,532142	69
70	2,0067	,784136	30,426426	59,075930	113,989392	70
71	2,0268	,764422	31,947747	62,620486	121,968650	71
72	2,0470	,788821	33,545134	66,387715	130,506455	72
73	2,0675	,859318	35,222391	70,360378	139,641907	73
74	2,0882	,977987	36,983510	74,582001	149,416840	74
75	2,1091	,146996	38,832686	79,056921	159,876019	75
76	2,1302	,368611	40,774320	83,800336	171,067341	76
77	2,1515	,645199	42,813036	88,828356	183,042055	77
78	2,1730	,979233	44,953688	94,158058	195,854998	78
79	2,1947	,373298	47,201372	99,807541	209,564848	79
80	2,2167	,830096	49,561441	105,795993	224,234388	80
81	2,2388	,352451	52,039513	112,143753	239,930795	81
82	2,2612	,943311	54,641489	118,872378	256,725950	82
83	2,2838	,605760	57,373563	126,004721	274,696766	83
84	2,3067	,343019	60,242241	133,565004	293,925541	84
85	2,3297	,158455	63,254353	141,578904	314,500328	85
86	2,3530	,055586	66,417071	150,073639	336,515351	86
87	2,3766	,038087	69,737925	159,078057	360,071426	87
88	2,4003	,109801	73,224821	168,622741	385,276426	88
89	2,4243	,274742	76.886062	178,740105	412,245776	89
90	2,4486	,537105	80,730365	189,464511	441,102980	90
91	2,4731	,901275	84,766883	200,832382	471,980188	91
92	2,4978	,371832	89,005227	212,882325	505,018802	92
93	2,5228	,953565	93,455489	225,655264	540,370118	93
94	2,5480	,651475	98,128263	239,194580	578,196026	94
95	2,5735	,470792	103,034676	253,546255	618,669748	95
96	2,5992	,416977	108,186410	268,759030	661,976630	96
97	2,6252	,495741	113,595731	284,884572	708,314994	97
98	2,6515	,713050	119,275517	301,977646	757,897044	98
99	2,6780	,075137	125,239293	320,096305	810,949837	99
100	2,7048	,588518	131,501258	339,302084	867,716326	100

Jahre.	1 %	%	4½ %	5 %	6 %	Jahre.
1	0,9900990	5385	0,9569378	0,9523810	0,9433962	1
2	0,9802960	5562	0,9157300	0,9070295	0,8899964	2
3	0,9705901	9964	0,8762966	0,8638376	0,8396193	3
4	0,9609803	8042	0,8385613	0,8227025	0,7920937	4
5	0,9514657	9271	0,8024510	0,7835262	0,7472582	5
6	0,9420452	3145	0,7678957	0,7462154	0,7049605	6
7	0,9327181	9178	0,7348285	0,7106813	0,6650571	7
8	0,9234832	3902	0,7031851	0,6768394	0,6274124	8
9	0,9143398	5867	0,6729044	0,6446089	0,5918985	9
10	0,9052876	5642	0,6439277	0,6139133	0,5583948	10
11	0,8963237	5809	0,6161987	0,5846793	0,5267875	11
12	0,8874492	5970	0,5896639	0,5568374	0,4969694	12
13	0,8786626	6741	0,5642716	0,5303214	0,4688390	13
14	0,8699636	4751	0,5399729	0,5050680	0,4423010	14
15	0,8613492	2645	0,5167204	0,4810171	0,4172651	15
16	0,8528213	9082	0,4944693	0,4581115	0,3936463	16
17	0,8443773	3732	0,4731764	0,4362967	0,3713644	17
18	0,8360173	6281	0,4528004	0,4155207	0,3503438	18
19	0,8277396	6424	0,4333018	0,3957340	0,3305130	19
20	0,8195443	3869	0,4146429	0,3768895	0,3118047	20
21	0,8114302	8336	0,3967874	0,3589424	0,2941554	21
22	0,8033962	9554	0,3797009	0,3418499	0,2775051	22
23	0,7954417	7263	0,3633501	0,3255713	0,2617973	23
24	0,7875661	1215	0,3477035	0,3100679	0,2469785	24
25	0,7797684	1168	0,3327306	0,2953028	0,2329986	25
26	0,7720486	6892	0,3184025	0,2812407	0,2198100	26
27	0,7644038	8166	0,3046914	0,2678483	0,2073680	27
28	0,7568354	4775	0,2915707	0,2550936	0,1956301	28
29	0,7493426	6514	0,2790150	0,2429463	0,1845567	29
30	0,7419228	3187	0,2670000	0,2313774	0,1741101	30
31	0,7345774	4603	0,2555024	0,2203595	0,1642548	31
32	0,7273040	0579	0,2444999	0,2098662	0,1549574	32
33	0,7201030	0942	0,2339712	0,1998725	0,1461862	33
34	0,7129735	5521	0,2238959	0,1903548	0,1379115	34
35	0,7059144	4155	0,2142544	0,1812903	0,1301052	35
36	0,6899246	6687	0,2050282	0,1726574	0,1227408	36
37	0,6920042	2968	0,1961992	0,1644356	0,1157932	37
38	0,6851534	2854	0,1877504	0,1566054	0,1092388	38
39	0,6783696	6206	0,1796655	0,1491480	0,1030555	39
40	0,6716532	2890	0,1719287	0,1420457	0,0972222	40
41	0,6650032	2779	0,1645251	0,1352816	0,0917190	41
42	0,6584185	5749	0,1574403	0,1288396	0,0865274	42
43	0,6518999	1682	0,1506605	0,1227044	0,0816296	43
44	0,6454455	0463	0,1441728	0,1168613	0,0770091	44
45	0,6390549	1984	0,1379644	0,1112965	0,0726501	45
46	0,6327276	6139	0,1320233	0,1059967	0,0685378	46
47	0,6264630	2826	0,1263381	0,1009492	0,0646583	47
48	0,6202604	1948	0,1208977	0,0961421	0,0609984	48
49	0,6141192	3411	0,1156916	0,0915639	0,0575457	49
50	0,6080388	7126	0,1107097	0,0872037	0,0542884	50

Jahre.	1 %	%	4½ %	5 %	6 %	Jahre.
51	0,602018	3006	0,1059422	0,0830512	0,0512154	51
52	0,596058	9967	0,1013801	0,0790964	0,0483164	52
53	0,590156	0930	0,0970145	0,0753299	0,0455816	53
54	0,584313	2817	0,0928368	0,0717427	0,0430015	54
55	0,578528	3555	0,0888391	0,0683264	0,0405674	55
56	0,572800	2072	0,0850135	0,0650728	0,0382712	56
57	0,567128	9300	0,0813526	0,0619741	0,0361049	57
58	0,561513	3173	0,0778494	0,0590229	0,0340612	58
59	0,555954	8628	0,0744970	0,0562123	0,0321332	59
60	0,550449	9604	0,0712890	0,0535355	0,0303143	60
61	0,544999	4042	0,0682191	0,0509862	0,0285984	61
62	0,539603	8887	0,0652815	0.0485583	0,0269797	62
63	0,534261	5084	0,0624703	0,0462460	0,0254525	63
64	0,528972	2580	0,0597802	0,0440438	0,0240118	64
65	0,523734	1327	0,0572059	0,0419465	0,0226526	65
66	0,518548	1276	0,0547425	0,0399490	0,0213704	66
67	0,513412	2381	0,0523852	0,0380467	0,0201608	67
68	0,508331	1597	0,0501294	0,0362349	0,0190196	68
69	0,503297	7882	0,0479707	0,0345095	0,0179430	69
70	0,498312	2194	0,0459050	0,0328662	0,0169274	70
71	0,493387	494	0,0439282	0,0313011	0,0159692	71
72	0,488498	3744	0,0420366	0,0298106	0,0150653	72
73	0,483650	908	0,0402264	0,0283910	0,0142125	73
74	0,478878	3950	0,0384941	0,0270391	0,0134081	74
75	0,474127	837	0,0368365	0,0257515	0,0126491	75
76	0,469437	535	0,0352502	0,0245252	0,0119331	76
77	0,464788	015	0,0337323	0,0233574	0,0112577	77
78	0,460180	245	0,0322797	0,0222451	0,0106204	78
79	0,455621	197	0,0308897	0,0211858	0,0100193	79
80	0,451113	843	0,0295595	0,0201770	0,0094522	80
81	0,446657	157	0,0282866	0,0192162	0,0089171	81
82	0,442221	112	0,0270685	0,0183011	0,0084124	82
83	0,437855	685	0,0259029	0,0174296	0,0079362	83
84	0,433510	851	0,0247874	0,0165996	0,0074870	84
85	0,429223	588	0,0237200	0,0158092	0,0070632	85
86	0,424972	873	0,0226986	0,0150564	0,0066634	86
87	0,420760	685	0,0217211	0,0143394	0,0062862	87
88	0,416597	005	0,0207858	0,0136566	0,0059304	88
89	0,412471	813	0,0198907	0,0130063	0,0055947	89
90	0,408393	089	0,0190342	0,0123869	0,0052780	90
91	0,404341	816	0,0182145	0,0117971	0,0049793	91
92	0,400340	977	0,0174302	0,0112353	0,0046974	92
93	0,396380	555	0,0166796	0,0107003	0,0044315	93
94	0,392450	534	0,0159613	0,0101907	0,0041807	94
95	0,388570	898	0,0152740	0,0097055	0,0039441	95
96	0,384721	632	0,0146163	0,0092433	0,0037208	96
97	0,380912	724	0,0139868	0,0088031	0,0035102	97
98	0,377141	157	0,0133845	0,0083840	0,0033115	98
99	0,373405	920	0,0128082	0,0079847	0,0031241	99
100	0,369713	000	0,0122566	0,0076045	0,0029472	100

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
1	1,01	1,045	1,05	1,06	1,07	1
2	1,0201	1,092025	1,1025	1,1236	1,1449	2
3	1,030301	1,141166	1,157625	1,191016	1,225043	3
4	1,040604	1,192519	1,215506	1,262477	1,310796	4
5	1,051010	1,246182	1,276282	1,338226	1,402552	5
6	1,061520	1,302260	1,340096	1,418519	1,500730	6
7	1,072135	1,360862	1,407100	1,503630	1,605781	7
8	1,082856	1,422101	1,477455	1,593848	1,718186	8
9	1,093685	1,486095	1,551328	1,689479	1,838459	9
10	1,104622	1,552969	1,628895	1,790848	1,967151	10
11	1,115661	1,622853	1,710339	1,898299	2,104852	11
12	1,126822	1,695881	1,795856	2,012196	2,252192	12
13	1,138091	1,772196	1,885649	2,132928	2,409845	13
14	1,149471	1,851945	1,979932	2,260904	2,578534	14
15	1,160961	1,935282	2,078928	2,396558	2,759032	15
16	1,172572	2,022370	2,182875	2,540352	2,952164	16
17	1,184302	2,113377	2,292018	2,692773	3,158815	17
18	1,196142	2,208479	2,406619	2,854339	3,379932	18
19	1,208102	2,307860	2,526950	3,025600	3,616528	19
20	1,220192	2,411714	2,653298	3,207135	3,869684	20
21	1,232392	2,520241	2,785963	3,399564	4,140562	21
22	1,244712	2,633652	2,925261	3,603537	4,430402	22
23	1,257162	2,752166	3,071524	3,819750	4,740530	23
24	1,269732	2,876014	3,225100	4,048935	5,072367	24
25	1,282433	3,005434	3,386355	4,291871	5,427433	25
26	1,295258	3,140679	3,555673	4,549383	5,807353	26
27	1,308208	3,282010	3,733456	4,822346	6,213868	27
28	1,321293	3,429700	3,920129	5,111687	6,648838	28
29	1,334503	3,584036	4,116136	5,418388	7,114257	29
30	1,347848	3,745318	4,321942	5,743491	7,612255	30
31	1,361323	3,913857	4,538039	6,088101	8,145113	31
32	1,374941	4,089981	4,764941	6,453387	8,715271	32
33	1,388694	4,274030	5,003189	6,840590	9,325340	33
34	1,402571	4,466362	5,253348	7,251025	9,978114	34
35	1,416601	4,667348	5,516015	7,686087	10,676581	35
36	1,430761	4,877378	5,791816	8,147252	11,423942	36
37	1,445076	5,096860	6,081407	8,636087	12,223618	37
38	1,459525	5,326219	6,385477	9,154252	13,079271	38
39	1,474125	5,565899	6,704751	9,703507	13,994820	39
40	1,488866	5,816365	7,039989	10,285718	14,974458	40
41	1,503753	6,078101	7,391988	10,902861	16,022670	41
42	1,518791	6,351615	7,761588	11,557033	17,144257	42
43	1,533978	6,637438	8,149667	12,250455	18,344355	43
44	1,549318	6,936123	8,557150	12,985482	19,628460	44
45	1,564811	7,248248	8,985008	13,764611	21,002452	45
46	1,580459	7,574420	9,434258	14,590487	22,472623	46
47	1,596263	7,915268	9,905971	15,465917	24,045707	47
48	1,612226	8,271456	10,401270	16,393872	25,728907	48
49	1,628348	8,643671	10,921333	17,377504	27,529930	49
50	1,644632	9,032636	11,467400	18,420154	29,457025	50

Druck von W. Plötz in Halle.

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
1	1,01	1,045	1,05	1,06	1,07	1
2	1,0201	1,092025	1,1025	1,1236	1,1449	2
3	1,030301	1,141166	1,157625	1,191016	1,225043	3
4	1,040604	1,192519	1,215506	1,262477	1,310796	4
5	1,051010	1,246182	1,276282	1,338226	1,402552	5
6	1,061520	1,302260	1,340096	1,418519	1,500730	6
7	1,072135	1,360862	1,407100	1,503630	1,605781	7
8	1,082857	1,422101	1,477455	1,593848	1,718186	8
9	1,093685	1,486095	1,551328	1,689479	1,838459	9
10	1,104622	1,552969	1,628895	1,790848	1,967151	10
11	1,115668	1,622853	1,710339	1,898299	2,104852	11
12	1,126825	1,695881	1,795856	2,012196	2,252192	12
13	1,138093	1,772196	1,885649	2,132928	2,409845	13
14	1,149474	1,851945	1,979932	2,260904	2,578534	14
15	1,160969	1,935282	2,078928	2,396558	2,759032	15
16	1,172579	2,022370	2,182875	2,540352	2,952164	16
17	1,184302	2,113377	2,292018	2,692773	3,158815	17
18	1,196142	2,208479	2,406619	2,854339	3,379932	18
19	1,208102	2,307860	2,526950	3,025600	3,616528	19
20	1,220192	2,411714	2,653298	3,207135	3,869684	20
21	1,232392	2,520241	2,785963	3,399564	4,140562	21
22	1,244712	2,633652	2,925261	3,603537	4,430402	22
23	1,257162	2,752166	3,071524	3,819750	4,740530	23
24	1,269732	2,876014	3,225100	4,048935	5,072367	24
25	1,282433	3,005434	3,386355	4,291871	5,427433	25
26	1,295258	3,140679	3,555673	4,549383	5,807353	26
27	1,308208	3,282010	3,733456	4,822346	6,213868	27
28	1,321293	3,429700	3,920129	5,111687	6,648838	28
29	1,334503	3,584036	4,116136	5,418388	7,114257	29
30	1,347848	3,745318	4,321942	5,743491	7,612255	30
31	1,361323	3,913857	4,538039	6,088101	8,145113	31
32	1,374941	4,089981	4,764941	6,453387	8,715271	32
33	1,388694	4,274030	5,003189	6,840590	9,325340	33
34	1,402571	4,466362	5,253348	7,251025	9,978114	34
35	1,416601	4,667348	5,516015	7,686087	10,676581	35
36	1,430764	4,877378	5,791816	8,147252	11,423942	36
37	1,445076	5,096860	6,081407	8,636087	12,223618	37
38	1,459525	5,326219	6,385477	9,154252	13,079271	38
39	1,474125	5,565899	6,704751	9,703507	13,994820	39
40	1,488865	5,816365	7,039989	10,285718	14,974458	40
41	1,503753	6,078101	7,391988	10,902861	16,022670	41
42	1,518790	6,351615	7,761588	11,557033	17,144257	42
43	1,533978	6,637438	8,149667	12,250455	18,344355	43
44	1,549318	6,936123	8,557150	12,985482	19,628460	44
45	1,564811	7,248248	8,985008	13,764611	21,002452	45
46	1,580459	7,574420	9,434258	14,590487	22,472623	46
47	1,596263	7,915268	9,905971	15,465917	24,045707	47
48	1,612226	8,271456	10,401270	16,393872	25,728907	48
49	1,628348	8,643671	10,921333	17,377504	27,529930	49
50	1,644632	9,032636	11,467400	18,420154	29,457025	50

I.

Jal	4 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
5	7,390951	9,439105	12,040770	19,525364	31,519017	51
5	7,686589	9,863865	12,642808	20,696885	33,725348	52
5	7,994052	10,307739	13,274949	21,938698	36,086122	53
5	8,313814	10,771587	13,938696	23,255020	38,612151	54
5	8,646367	11,256308	14,635631	24,650322	41,315001	55
5	8,992222	11,762842	15,367412	26,129341	44,207052	56
5	9,351910	12,292170	16,135783	27,697101	47,301545	57
5	9,725987	12,845318	16,942572	29,358927	50,612653	58
5	10,115026	13,423357	17,789701	31,120463	54,155539	59
6	10,519627	14,027408	18.679186	32,987691	57,946427	60
6	10,940413	14,658641	19,613145	34,966952	62,002677	61
6	11,378029	15,318280	20,593802	37,064969	66,342864	62
6	11,833150	16,007603	21,623493	39,288868	70,986865	63
6	12,306476	16,727945	22,704667	41,646200	75,955945	64
6	12,798735	17,480702	23,839901	44,144972	81,272861	65
6	13,310685	18,267334	25,031896	46,793700	86,961962	66
6	13,843112	19,089364	26,283490	49,601290	93,049299	67
6	14,396836	19,948385	27,597665	52,577368	99,562750	68
6	14,972710	20,846063	28,977548	55,732010	106,532142	69
7	15,571618	21,784136	30,426426	59,075930	113,989392	70
7	16,194483	22,764422	31,947747	62,620486	121,968650	71
7	16,842262	23,788821	33,545134	66,387715	130,506455	72
7	17,515953	24,859318	35,222391	70,360378	139,641907	73
7	18,216591	25,977987	36,983510	74,582001	149,416840	74
7	18,945255	27,146996	38,832686	79,056921	159,876019	75
7	19,703065	28,368611	40,774320	83,800336	171,067341	76
7	20,491187	29,645199	42,813036	88,828356	183,042055	77
7	21,310835	30,979233	44,953688	94,158058	195,854998	78
7	22,163268	32,373298	47,201372	99,807541	209,564848	79
7	23,049799	33,830096	49,561441	105,795993	224,234388	80
7	23,971791	35,352451	52,039513	112,143753	239,930795	81
7	24,930663	36,943311	54,641489	118,872378	256,725950	82
7	25,927889	38,605760	57,373563	126,004721	274,696766	83
7	26,965005	40,343019	60,242241	133,565004	293,925541	84
7	28,043605	42,158455	63,254353	141,578904	314,500328	85
7	29,165349	44,055586	66,417071	150,073639	336,515351	86
7	30,331963	46,038087	69,737925	159,078057	360,071426	87
7	31,545242	48,109801	73,224821	168,622741	385,276426	88
7	32,807051	50,274742	76.886062	178,740105	412,245776	89
7	34,119333	52,537105	80,730365	189,464511	441,102980	90
7	35,484107	54,901275	84,766883	200,832382	471,980188	91
7	36,903471	57,371832	89,005227	212,882325	505,018802	92
7	38,379610	59,953565	93,455489	225,655264	540,370118	93
7	39,914794	62,651475	98,128263	239,194580	578,196026	94
7	41,511386	65,470792	103,034676	253,546255	618,669748	95
7	43,171841	68,416977	108,186410	268,759030	661,976630	96
7	44,898715	71,495741	113,595731	284,884572	708,314994	97
7	46,694664	74,713050	119,275517	301,977646	757,897044	98
7	48,562450	78,075137	125,239293	320,096305	810,949837	99
10	50,504948	81,588518	131,501258	339,302084	867,716326	100

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
51	1,6610	,439105	12,040770	19,525364	31,519017	51
52	1,6776	,863865	12,642808	20,696885	33,725348	52
53	1,6944	,307739	13,274949	21,938698	36,086122	53
54	1,7114	,771587	13,938696	23,255020	38,612151	54
55	1,7285	,256308	14,635631	24,650322	41,315001	55
56	1,7458	,762842	15,367412	26,129341	44,207052	56
57	1,7632	,292170	16,135783	27,697101	47,301545	57
58	1,7809	,845318	16,942572	29,358927	50,612653	58
59	1,7987	,423357	17,789701	31,120463	54,155539	59
60	1,8166	,027408	18.679186	32,987691	57,946427	60
61	1,8348	,658641	19,613145	34,966952	62,002677	61
62	1,8532	,318280	20,593802	37,064969	66,342864	62
63	1,8717	,007603	21,623493	39,288868	70,986865	63
64	1,8904	,727945	22,704667	41,646200	75,955945	64
65	1,9093	,480702	23,839901	44,144972	81,272861	65
66	1,9284	,267334	25,031896	46,793700	86,961962	66
67	1,9477	,089364	26,283490	49,601290	93,049299	67
68	1,9672	,948385	27,597665	52,577368	99,562750	68
69	1,9868	,846063	28,977548	55,732010	106,532142	69
70	2,0067	,784136	30,426426	59,075930	113,989392	70
71	2,0268	,764422	31,947747	62,620486	121,968650	71
72	2,0470	,788821	33,545134	66,387715	130,506455	72
73	2,0675	,859318	35,222391	70,360378	139,641907	73
74	2,0882	,977987	36,983510	74,582001	149,416840	74
75	2,1091	,146996	38,832686	79,056921	159,876019	75
76	2,1302	,368611	40,774320	83,800336	171,067341	76
77	2,1515	,645199	42,813036	88,828356	183,042055	77
78	2,1730	,979233	44,953688	94,158058	195,854998	78
79	2,1947	,373298	47,201372	99,807541	209,564848	79
80	2,2167	,830096	49,561441	105,795993	224,234388	80
81	2,2388	,352451	52,039513	112,143753	239,930795	81
82	2,2612	,943311	54,641489	118,872378	256,725950	82
83	2,2838	,605760	57,373563	126,004721	274,696766	83
84	2,3067	,343019	60,242241	133,565004	293,925541	84
85	2,3297	,158455	63,254353	141,578904	314,500328	85
86	2,3530	,055586	66,417071	150,073639	336,515351	86
87	2,3766	,038087	69,737925	159,078057	360,071426	87
88	2,4003	,109801	73,224821	168,622741	385,276426	88
89	2,4243	,274742	76.886062	178,740105	412,245776	89
90	2,4486	,537105	80,730365	189,464511	441,102980	90
91	2,4731	,901275	84,766883	200,832382	471,980188	91
92	2,4978	,371832	89,005227	212,882325	505,018802	92
93	2,5228	,953565	93,455489	225,655264	540,370118	93
94	2,5480	,651475	98,128263	239,194580	578,196026	94
95	2,5735	,470792	103,034676	253,546255	618,669748	95
96	2,5992	,416977	108,186410	268,759030	661,976630	96
97	2,6252	,495741	113,595731	284,884572	708,314994	97
98	2,6515	,713050	119,275517	301,977646	757,897044	98
99	2,6780	,075137	125,239293	320,096305	810,949837	99
100	2,7048	,588518	131,501258	339,302084	867,716326	100

Jahre.	1 %	%	4½ %	5 %	6 %	Jahre.
1	0,9900990	6385	0,9569378	0,9523810	0,9433962	1
2	0,9802960	5562	0,9157300	0,9070295	0,8899964	2
3	0,9705901	9964	0,8762966	0,8638376	0,8396193	3
4	0,9609803	8042	0,8385613	0,8227025	0,7920937	4
5	0,9514657	9271	0,8024510	0,7835262	0,7472582	5
6	0,9420453	2145	0,7678957	0,7462154	0,7049605	6
7	0,9327189	2178	0,7348285	0,7106813	0,6650571	7
8	0,9234832	3902	0,7031851	0,6768394	0,6274124	8
9	0,9143398	5867	0,6729044	0,6446089	0,5918985	9
10	0,9052876	5642	0,6439277	0,6139133	0,5583948	10
11	0,8963237	5809	0,6161987	0,5846793	0,5267875	11
12	0,8874492	5970	0,5896639	0,5568374	0,4969694	12
13	0,8786626	6741	0,5642716	0,5303214	0,4688390	13
14	0,8699634	4751	0,5399729	0,5050680	0,4423010	14
15	0,8613492	2645	0,5167204	0,4810171	0,4172651	15
16	0,8528213	9082	0,4944693	0,4581115	0,3936463	16
17	0,8443773	3732	0,4731764	0,4362967	0,3713644	17
18	0,8360173	6281	0,4528004	0,4155207	0,3503438	18
19	0,8277396	6424	0,4333018	0,3957340	0,3305130	19
20	0,8195443	3869	0,4146429	0,3768895	0,3118047	20
21	0,8114302	8336	0,3967874	0,3589424	0,2941554	21
22	0,8033962	9554	0,3797009	0,3418499	0,2775051	22
23	0,7954417	7263	0,3633501	0,3255713	0,2617973	23
24	0,7875661	1215	0,3477035	0,3100679	0,2469785	24
25	0,7797684	1168	0,3327306	0,2953028	0,2329986	25
26	0,7720486	6892	0,3184025	0,2812407	0,2198100	26
27	0,7644038	8166	0,3046914	0,2678483	0,2073680	27
28	0,7568354	4775	0,2915707	0,2550936	0,1956301	28
29	0,7493426	6514	0,2790150	0,2429463	0,1845567	29
30	0,7419226	3187	0,2670000	0,2313774	0,1741101	30
31	0,7345774	4603	0,2555024	0,2203595	0,1642548	31
32	0,7273040	0579	0,2444999	0,2098662	0,1549574	32
33	0,7201030	0942	0,2339712	0,1998725	0,1461862	33
34	0,7129735	5521	0,2238959	0,1903548	0,1379115	34
35	0,7059144	4155	0,2142544	0,1812903	0,1301052	35
36	0,6899246	6687	0,2050282	0,1726574	0,1227408	36
37	0,6920042	2968	0,1961992	0,1644356	0,1157932	37
38	0,6851534	2854	0,1877504	0,1566054	0,1092388	38
39	0,6783696	6206	0,1796655	0,1491480	0,1030555	39
40	0,6716532	2890	0,1719287	0,1420457	0,0972222	40
41	0,6650032	2779	0,1645251	0,1352816	0,0917190	41
42	0,6584185	5749	0,1574403	0,1288396	0,0865274	42
43	0,6518999	1682	0,1506605	0,1227044	0,0816296	43
44	0,6454455	0463	0,1441728	0,1168613	0,0770091	44
45	0,6390549	1984	0,1379644	0,1112965	0,0726501	45
46	0,6327276	6139	0,1320233	0,1059967	0,0685378	46
47	0,6264636	2826	0,1263381	0,1009492	0,0646583	47
48	0,6202604	1948	0,1208977	0,0961421	0,0609984	48
49	0,6141192	3411	0,1156916	0,0915639	0,0575457	49
50	0,6080388	7126	0,1107097	0,0872037	0,0542884	50

Jahre.	1 %	%	4½ %	5 %	6 %	Jahre.
51	0,602018	3006	0,1059422	0,0830512	0,0512154	51
52	0,596058	9967	0,1013801	0,0790964	0,0483164	52
53	0,590156	0930	0,0970145	0,0753299	0,0455816	53
54	0,584313	2817	0,0928368	0,0717427	0,0430015	54
55	0,578528	3555	0,0888391	0,0683264	0,0405674	55
56	0,572800	2072	0,0850135	0,0650728	0,0382712	56
57	0,567128	9300	0,0813526	0,0619741	0,0361049	57
58	0,561513	3173	0,0778494	0,0590229	0,0340612	58
59	0,555954	8628	0,0744970	0,0562123	0,0321332	59
60	0,550449	9604	0,0712890	0,0535355	0,0303143	60
61	0,544999	4042	0,0682191	0,0509862	0,0285984	61
62	0,539603	3887	0,0652815	0.0485583	0,0269797	62
63	0,534261	5084	0,0624703	0,0462460	0,0254525	63
64	0,528972	2580	0,0597802	0,0440438	0,0240118	64
65	0,523734	1327	0,0572059	0,0419465	0,0226526	65
66	0,518548	1276	0,0547425	0,0399490	0,0213704	66
67	0,513414	2381	0,0523852	0,0380467	0,0201608	67
68	0,508331	4597	0,0501294	0,0362349	0,0190196	68
69	0,503297	8882	0,0479707	0,0345095	0,0179430	69
70	0,498312	4194	0,0459050	0,0328662	0,0169274	70
71	0,493387	7494	0,0439282	0,0313011	0,0159692	71
72	0,488498	3744	0,0420366	0,0298106	0,0150653	72
73	0,483650	0908	0,0402264	0,0283910	0,0142125	73
74	0,478878	8950	0,0384941	0,0270391	0,0134081	74
75	0,474127	8837	0,0368365	0,0257515	0,0126491	75
76	0,469437	5535	0,0352502	0,0245252	0,0119331	76
77	0,464788	3015	0,0337323	0,0233574	0,0112577	77
78	0,460180	9245	0,0322797	0,0222451	0,0106204	78
79	0,455621	1197	0,0308897	0,0211858	0,0100193	79
80	0,451113	3843	0,0295595	0,0201770	0,0094522	80
81	0,446657	7157	0,0282866	0,0192162	0,0089171	81
82	0,442221	1112	0,0270685	0,0183011	0,0084124	82
83	0,437855	3685	0,0259029	0,0174296	0,0079362	83
84	0,433510	9851	0,0247874	0,0165996	0,0074870	84
85	0,429223	3588	0,0237200	0,0158092	0,0070632	85
86	0,424972	2873	0,0226986	0,0150564	0,0066634	86
87	0,420769	9685	0,0217211	0,0143394	0,0062862	87
88	0,416597	0005	0,0207858	0,0136566	0,0059304	88
89	0,412474	1813	0,0198907	0,0130063	0,0055947	89
90	0,408393	3089	0,0190342	0,0123869	0,0052780	90
91	0,404341	8816	0,0182145	0,0117971	0,0049793	91
92	0,400340	0977	0,0174302	0,0112353	0,0046974	92
93	0,396380	5555	0,0166796	0,0107003	0,0044315	93
94	0,392450	5534	0,0159613	0,0101907	0,0041807	94
95	0,388570	8898	0,0152740	0,0097055	0,0039441	95
96	0,384721	6632	0,0146163	0,0092433	0,0037208	96
97	0,380912	7724	0,0139868	0,0088031	0,0035102	97
98	0,377144	1157	0,0133845	0,0083840	0,0033115	98
99	0,373405	9920	0,0128082	0,0079847	0,0031241	99
100	0,369713	8000	0,0122566	0,0076045	0,0029472	100

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
1	0,99009	0,9569378	0,9523810	0,9433962	0,9346	1
2	1,97039	1,8726678	1,8594104	1,8333927	1,8080	2
3	2,94098	2,7489644	2,7232480	2,6730119	2,6243	3
4	3,90196	3,5875257	3,5459505	3,4651056	3,3872	4
5	4,85343	4,3899767	4,3294767	4,2123638	4,1002	5
6	5,79547	5,1578725	5,0756921	4,9173243	4,7665	6
7	6,72819	5,8927009	5,7863734	5,5823814	5,3893	7
8	7,65167	6,5958861	6,4632128	6,2097938	5,9713	8
9	8,56601	7,2687905	7,1078217	6,8016923	6,5152	9
10	9,47130	7,9127182	7,7217349	7,3600871	7,0236	10
11	10,36762	8,5289169	8,3064142	7,8868746	7,4987	11
12	11,25507	9,1185808	8,8632516	8,3838439	7,9427	12
13	12,13374	9,6828524	9,3935730	8,8526830	8,3577	13
14	13,00370	10,2228253	9,8986409	9,2949839	8,7455	14
15	13,86505	10,7395457	10,3796580	9,7122490	9,1079	15
16	14,71787	11,2340150	10,8377696	10,1058953	9,4466	16
17	15,56225	11,7071914	11,2740662	10,4772597	9,7632	17
18	16,39826	12,1599918	11,6895869	10,8276035	10,0591	18
19	17,22600	12,5932936	12,0853209	11,1581165	10,3356	19
20	18,04555	13,0079365	12,4622103	11,4699212	10,5940	20
21	18,85698	13,4047239	12,8211527	11,7640766	10,8355	21
22	19,66037	13,7844248	13,1630026	12,0415817	11,0612	22
23	20,45582	14,1477749	13,4885739	12,3033790	11,2722	23
24	21,24338	14,4954784	13,7986418	12,5503575	11,4693	24
25	22,02315	14,8282090	14,0939446	12,7833562	11,6536	25
26	22,79520	15,1466114	14,3751853	13,0031662	11,8258	26
27	23,55960	15,4513028	14,6430336	13,2105341	11,9867	27
28	24,31644	15,7428735	14,8981273	13,4061643	12,1371	28
29	25,06578	16,0218885	15,1410736	13,5907210	12,2777	29
30	25,80770	16,2888885	15,3724510	13,7648312	12,4090	30
31	26,54228	16,5443910	15,5928105	13,9290860	12,5318	31
32	27,26958	16,7888909	15,8026767	14,0840434	12,6466	32
33	27,98969	17,0228621	16,0025492	14,2302296	12,7538	33
34	28,70266	17,2467580	16,1929040	14,3681411	12,8540	34
35	29,40858	17,4610124	16,3741943	14,4982464	12,9477	35
36	30,10750	17,6660406	16,5468517	14,6209871	13,0352	36
37	30,79950	17,8622398	16,7112873	14,7367803	13,1170	37
38	31,48466	18,0499902	16,8678927	14,8460192	13,1935	38
39	32,16303	18,2296557	17,0170407	14,9490747	13,2649	39
40	32,83468	18,4015844	17,1590864	15,0462969	13,3317	40
41	33,49968	18,5661095	17,2943680	15,1380159	13,3941	41
42	34,15810	18,7235498	17,4232076	15,2245433	13,4524	42
43	34,81000	18,8742103	17,5459120	15,3061729	13,5070	43
44	35,45545	19,0183831	17,6627733	15,3831820	13,5579	44
45	36,09450	19,1563474	17,7740698	15,4558321	13,6055	45
46	36,72723	19,2883707	17,8800665	15,5243699	13,6500	46
47	37,35369	19,4147088	17,9810157	15,5890282	13,6916	47
48	37,97395	19,5356065	18,0771578	15,6500266	13,7305	48
49	38,58807	19,6512981	18,1687217	15,7075723	13,7668	49
50	39,19611	19,7620078	18,2559255	15,7618606	13,8007	50

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				
41				
42				
43				
44				
45				
46				
47				
48				
49				
50				

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
51	39,7981	,8679500	18,3389766	15,8130761	13,8325	51
52	40,3941	,9693302	18,4180730	15,8613925	13,8621	52
53	40,9843	,0663447	18,4934028	15,9069741	13,8898	53
54	41,5686	,1591815	18,5651456	15,9499755	13,9157	54
55	42,1471	,2480206	18,6334720	15,9905430	13,9399	55
56	42,7199	,3330340	18,6985447	16,0288141	13,9626	56
57	43,2871	,4143866	18,7605188	16,0649190	13,9837	57
58	43,8486	,4922360	18,8195417	16,0989802	14,0035	58
59	44,4045	,5667330	18,8757540	16,1311134	14,0219	59
60	44,9550	,6380220	18,9292895	16,1614277	14,0392	60
61	45,5000	,7062412	18,9802757	16,1900261	14,0553	61
62	46,0396	,7715227	19,0288340	16,2170058	14,0704	62
63	46,5739	,8339930	19,0750800	16,2424583	14,0845	63
64	47,1028	,8937732	19,1191238	16,2664701	14,0976	64
65	47,6266	,9509791	19,1610703	16,2891227	14,1099	65
66	48,1451	,0057217	19,2010194	16,3104931	14,1214	66
67	48,6585	,0581068	19,2390661	16.3306539	14,1322	67
68	49,1669	,1082362	19,2753010	16,3496735	14,1422	68
69	49,6701	,1562069	19,3098105	16,3676165	14,1516	69
70	50,1685	,2021119	19,3426766	16,3845439	14,1604	70
71	50,6618	,2460401	19,3739778	16,4005131	14,1686	71
72	51,1503	,2880766	19,4037883	16,4155784	14,1763	72
73	51,6340	,3283030	19,4321794	16,4297909	14,1834	73
74	52,1129	,3667971	19,4592185	16,4431990	14,1901	74
75	52,5870	,4036336	19,4849700	16,4558481	14,1964	75
76	53,0564	,4388838	19,5094952	16,4677812	14,2022	76
77	53,5212	,4726161	19,5328526	16,4790389	14,2077	77
78	53,9814	,5048958	19,5550977	16,4896593	14,2128	78
79	54,4370	,5357854	19,5762835	16,4996786	14,2175	79
80	54,8882	,5653449	19,5964605	16,5091308	14,2220	80
81	55,3348	,5936315	19,6156767	16,5180479	14,2262	81
82	55,7770	,6207000	19,6339778	16,5264603	14,2301	82
83	56,2149	,6466029	19,6514074	16,5343965	14,2337	83
84	56,6484	,6713903	19,6680070	16,5418835	14,2371	84
85	57,0776	,6951103	19,6838162	16,5489467	14,2403	85
86	57,5026	,7178089	19,6988726	16,5556101	14,2433	86
87	57,9234	,7395301	19,7132120	16,5618963	14,2460	87
88	58,3400	,7603159	19,7268686	16,5678267	14,2486	88
89	58,7524	,7802066	19,7398748	16,5734214	14,2511	89
90	59,1608	,7992407	19,7522617	16,5786994	14,2533	90
91	59,5652	,8174553	19,7640588	16,5836787	14,2554	91
92	59,9655	,8348854	19,7752941	16,5883762	14,2574	92
93	60,3619	,8515650	19,7859944	16,5928077	14,2593	93
94	60,7544	,8675263	19,7961851	16,5969884	14,2610	94
95	61,1429	,8828003	19,8058906	16,6009324	14,2626	95
96	61,5277	,8974166	19,8151339	16,6046532	14,2641	96
97	61,9086	,9114034	19,8239370	16,6081634	14,2655	97
98	62,2857	,9247879	19,8323210	16,6114749	14,2669	98
99	62,6591	,9375961	19,8403057	16,6145990	14,2681	99
100	63,0288	,9498527	19,8479102	16,6175462	14,2693	100

Jahre.	1 %	2 %	2½ %	2¾ %	3 %
51	39,79813623	31,76784890	26,40403177	21,24795810	25,09132
52	40,30410425	32,14040890	25,02390607	27,48195897	26,10624
53	40,98453607	32,46904890	25,10324165	27,72027897	26,37400
54	41,50606021	32,98252838	25,48452695	27,90509897	26,77060
55	42,14710225	33,17467275	25,71895795	28,18526895	26,77442
56	42,71909225	33,50180935	25,90465795	28,40419495	26,96403
57	43,29712105	33,69381105	26,20961745	28,61715295	27,16083
58	43,84508475	34,14522895	26,43023095	28,82505895	27,31095
59	44,40485955	34,43010415	26,69425725	29,09538915	27,60539
60	44,95903954	34,76095695	26,92216625	29,32706295	27,67393
61	45,50085450	35,09090295	27,13039005	29,54187395	27,84033
62	46,03981105	35,37526405	27,34072545	29,75953995	28,06342
63	46,57391265	35,81954325	27,73502875	30,17409195	28,47606
64	47,10257385	35,89144195	27,76300185	30,23611995	28,53602
65	47,62680755	36,10746355	27,90497715	30,42538015	28,72390
66	48,14513025	36,46051035	28,18063095	30,72414105	29,03903
67	48,65693705	36,73143455	28,39617095	30,95177395	29,27306
68	49,16090195	36,90393435	28,53931095	31,10083395	29,42703
69	49,67019595	37,24539475	28,72303195	31,31095395	29,64037
70	50,16591435	37,49501905	28,89725715	31,49539395	29,82347
71	50,66139315	37,74371415	29,07109095	31,69082795	30,02401
72	51,15039195	37,99410735	29,24087595	31,88063795	30,22093
73	51,64109195	38,21909075	29,40917395	32,06095395	30,40627
74	52,11293195	38,47010675	29,58235095	32,24109595	30,59391
75	52,59703195	38,72106075	29,75547395	32,42106795	30,78037
76	53,07619195	38,97106075	29,92859395	32,60095995	30,96683
77	53,55535195	39,22106075	30,10171395	32,78085195	31,15329
78	54,03451195	39,47106075	30,27483395	32,96074395	31,33975
79	54,51367195	39,72106075	30,44795395	33,14063595	31,52621
80	54,99283195	39,97106075	30,62107395	33,32052795	31,71267
81	55,47199195	40,22106075	30,79419395	33,50041995	31,89913
82	55,95115195	40,47106075	30,96731395	33,68031195	32,08559
83	56,43031195	40,72106075	31,14043395	33,86020395	32,27205
84	56,90947195	40,97106075	31,31355395	34,04009595	32,45851
85	57,38863195	41,22106075	31,48667395	34,21998795	32,64497
86	57,86779195	41,47106075	31,65979395	34,39987995	32,83143
87	58,34695195	41,72106075	31,83291395	34,57977195	33,01789
88	58,82611195	41,97106075	32,00603395	34,75966395	33,20435
89	59,30527195	42,22106075	32,17915395	34,93955595	33,39081
90	59,78443195	42,47106075	32,35227395	35,11944795	33,57727
91	60,26359195	42,72106075	32,52539395	35,29933995	33,76373
92	60,74275195	42,97106075	32,69851395	35,47923195	33,95019
93	61,22191195	43,22106075	32,87163395	35,65912395	34,13665
94	61,70107195	43,47106075	33,04475395	35,83901595	34,32311
95	62,18023195	43,72106075	33,21787395	36,01890795	34,50957
96	62,65939195	43,97106075	33,39099395	36,19879995	34,69603
97	63,13855195	44,22106075	33,56411395	36,37869195	34,88249
98	63,61771195	44,47106075	33,73723395	36,55858395	35,06895
99	64,09687195	44,72106075	33,91035395	36,73847595	35,25541
100	64,57603195	44,97106075	34,08347395	36,91836795	35,44187

Tafel VI.

Alter.	*Süssmil Bauma* Lebende.
0	1000
1	750
2	661
3	618
4	593
5	579
6	567
7	556
8	547
9	539
10	532
11	527
12	523
13	519
14	515
15	511
16	507
17	503
18	499
19	495
20	491
21	486
22	481
23	476
24	471
25	466
26	461
27	456
28	451
29	445
30	439
31	433
32	427
33	421
34	415
35	409
36	402
37	395
38	388
39	381
40	374
41	367
42	360
43	353
44	346
45	339
46	332
47	324
48	316

	9	D. 1.
6	474	0,8
3	551	0,8
9	627	0,8
4	701	0,8
7	774	0,8
9	846	0,7
0	917	0,7
0	987	0,6
3	*055	0,7
6	122	0,7
2	189	0,6
8	254	0,7
2	319	0,6
6	382	0,6
9	445	0,6
0	506	0,7
1	567	0,6
1	627	0,6
1	686	0,6
0	745	0,6
7	802	0,6
4	859	0,6
0	915	0,6
0	971	0,5
0	*025	0,6
	079	0,6
	133	0,5
	186	0,5
	238	0,5
	289	0,5
	340	0,5
	390	0,5
	440	0,5
	489	0,5
	538	0,4
	586	0,4
	633	0,5
	680	0,5
	727	0,4
	773	0,4
	818	0,5
	863	0,5
	908	0,4
	952	0,4
	996	0,4
	9	D. 1.

| | | |

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
1	0,99009	0,9569378	0,9523810	0,9433962	0,9346	1
2	1,97039	1,8726678	1,8594104	1,8333927	1,8080	2
3	2,94098	2,7489644	2,7232480	2,6730119	2,6243	3
4	3,90196	3,5875257	3,5459505	3,4651056	3,3872	4
5	4,85343	4,3899767	4,3294767	4,2123638	4,1002	5
6	5,79547	5,1578725	5,0756921	4,9173243	4,7665	6
7	6,72819	5,8927009	5,7863734	5,5823814	5,3893	7
8	7,65167	6,5958861	6,4632128	6,2097938	5,9713	8
9	8,56601	7,2687905	7,1078217	6,8016923	6,5152	9
10	9,47130	7,9127182	7,7217349	7,3600871	7,0236	10
11	10,36763	8,5289169	8,3064142	7,8868746	7,4987	11
12	11,25507	9,1185808	8,8632516	8,3838439	7,9427	12
13	12,13374	9,6828524	9,3935730	8,8526830	8,3577	13
14	13,00370	10,2228253	9,8986409	9,2949839	8,7455	14
15	13,86505	10,7395457	10,3796580	9,7122490	9,1079	15
16	14,71787	11,2340150	10,8377696	10,1058953	9,4466	16
17	15,56225	11,7071914	11,2740662	10,4772597	9,7632	17
18	16,39826	12,1599918	11,6895869	10,8276035	10,0591	18
19	17,22600	12,5932936	12,0853209	11,1581165	10,3356	19
20	18,04555	13,0079365	12,4622103	11,4699212	10,5940	20
21	18,85698	13,4047239	12,8211527	11,7640766	10,8355	21
22	19,66037	13,7844248	13,1630026	12,0415817	11,0612	22
23	20,45582	14,1477749	13,4885739	12,3033790	11,2722	23
24	21,24338	14,4954784	13,7986418	12,5503575	11,4693	24
25	22,02315	14,8282090	14,0939446	12,7833562	11,6536	25
26	22,79520	15,1466114	14,3751853	13,0031662	11,8258	26
27	23,55960	15,4513028	14,6430336	13,2105341	11,9867	27
28	24,31644	15,7428735	14,8981273	13,4061643	12,1371	28
29	25,06578	16,0218885	15,1410736	13,5907210	12,2777	29
30	25,80770	16,2888885	15,3724510	13,7648312	12,4090	30
31	26,54228	16,5443910	15,5928105	13,9290860	12,5318	31
32	27,26958	16,7888909	15,8026767	14,0840434	12,6466	32
33	27,98969	17,0228621	16,0025492	14,2302296	12,7538	33
34	28,70266	17,2467580	16,1929040	14,3681411	12,8540	34
35	29,40858	17,4610124	16,3741943	14,4982464	12,9477	35
36	30,10750	17,6660406	16,5468517	14,6209871	13,0352	36
37	30,79950	17,8622398	16,7112873	14,7367803	13,1170	37
38	31,48466	18,0499902	16,8678927	14,8460192	13,1935	38
39	32,16303	18,2296557	17,0170407	14,9490747	13,2649	39
40	32,83468	18,4015844	17,1590864	15,0462969	13,3317	40
41	33,49968	18,5661095	17,2943680	15,1380159	13,3941	41
42	34,15810	18,7235498	17,4232076	15,2245433	13,4524	42
43	34,81000	18,8742103	17,5459120	15,3061729	13,5070	43
44	35,45545	19,0183831	17,6627733	15,3831820	13,5579	44
45	36,09450	19,1563474	17,7740698	15,4558321	13,6055	45
46	36,72723	19,2883707	17,8800665	15,5243699	13,6500	46
47	37,35369	19,4147088	17,9810157	15,5890282	13,6916	47
48	37,97395	19,5356065	18,0771578	15,6500266	13,7305	48
49	38,58807	19,6512981	18,1687217	15,7075723	13,7668	49
50	39,19611	19,7620078	18,2559255	15,7618606	13,8007	50

Jahre	1 %	2 %	2½ %	2¾ %	3 %
1	0,9900990	0,9803922	0,9756098	0,9732360	0,9708738
2	1,9703951	1,9611764	1,9527413	1,9470137	1,9134607
3	2,9409852	2,9411526	2,9268304	2,9204021	2,8286114
4	3,9019656	3,9215708	3,9024682	3,8930237	3,7170984
5	4,8534312	4,8922263	4,8780163	4,8659019	4,5797075
6	5,7954169	5,8611042	5,8534796	5,8388009	5,4171914
7	6,7279373	6,7185335	6,8286143	6,7994161	6,2302830
8	7,6510171	7,6516995	7,7994286	7,7509312	7,0196892
9	8,5656605	8,5660779	8,7650035	8,6943000	7,7861089
10	9,4713465	9,4713509	9,7254668	9,6296116	8,5302028
11	10,3676698	10,3758341	10,6808456	10,5569772	9,2526241
12	11,2550197	11,2550334	11,6312152	11,4775875	9,9540040
13	12,1337423	12,1336422	12,5766978	12,3915000	10,6349553
14	13,0037747	13,0036216	13,5174125	13,2990000	11,2960732
15	13,8651482	13,8650454	14,4534756	14,2000000	11,9379351
16	14,7179882	14,7178458	15,3849127	15,0950000	12,5611022
17	15,5623644	15,5622316	16,3118417	15,9839000	13,1661186
18	16,3983411	16,3982016	17,2343788	16,8668000	13,7535131
19	17,2260802	17,2260015	18,1526229	17,7439000	14,3237991
20	18,0456238	18,0456015	19,0666702	18,6153000	14,8774749
21	18,8571720	18,8570015	19,9767094	19,4811000	15,4150241
22	19,6608634	19,6607015	20,8828207	20,3414000	15,9369166
23	20,4567955	20,4566015	21,7851769	21,1963000	16,4435986
24	21,2451440	21,2450015	22,6839443	22,0459000	16,9355327
25	22,0259842	22,0258015	23,5792833	22,8904000	17,4131526
26	22,7994892	22,7992015	24,4712484	23,7298000	17,8767986
27	23,5657207	23,5654015	25,3599888	24,5643000	18,3269888
28	24,3248328	24,3245015	26,2456479	25,3940000	18,7641153
29	25,0768642	25,0765015	27,1283628	26,2190000	19,1884616
30	25,8219447	25,8215015	28,0082644	27,0394000	19,6004481
31	26,5601929	26,5596015	28,8854746	27,8553000	20,0004351
32	27,2917751	27,2910015	29,7601069	28,6669000	20,3887719
33	28,0168466	28,0157015	30,6322676	29,4742000	20,7658950
34	28,7355578	28,7340015	31,5020562	30,2774000	21,1321311
35	29,4480571	29,4460015	32,3695665	31,0765000	21,4877972
36	30,1544922	30,1518015	33,2348862	31,8717000	21,8332011
37	30,8550417	30,8514015	34,0980978	32,6630000	22,1686419
38	31,5498928	31,5449015	34,9592794	33,4506000	22,4944096
39	32,2391215	32,2324015	35,8185042	34,2345000	22,8107860
40	32,9228927	32,9140015	36,6758419	35,0148000	23,1180447
41	33,6013591	33,5898015	37,5313579	35,7916000	23,4164511
42	34,2746625	34,2599015	38,3851145	36,5649000	23,7062632
43	34,9429332	34,9245015	39,2371722	37,3349000	23,9877313
44	35,6062953	35,5837015	40,0876802	38,1016000	24,2611081
45	36,2648661	36,2376015	40,9366865	38,8651000	24,5266389
46	36,9187684	36,8863015	41,7842381	39,6256000	24,7845717
47	37,5681109	37,5299015	42,6303801	40,3831000	25,0351474
48	38,2129989	38,1686015	43,4751572	41,1377000	25,2786000
49	38,8535247	38,8025015	44,3186124	41,8894000	25,5151699
50	39,4897771	39,4316015	45,1607877	42,6384000	25,7450193

Jahre.	1 %	4½ %	5 %	6 %	7 %	Jahre.
51	39,7981	,8679500	18,3389766	15,8130761	13,8325	51
52	40,3941	,9693302	18,4180730	15,8613925	13,8621	52
53	40,9843	,0663447	18,4934028	15,9069741	13,8898	53
54	41,5686	,1591815	18,5651456	15,9499755	13,9157	54
55	42,1471	,2480206	18,6334720	15,9905430	13,9399	55
56	42,7199	,3330340	18,6985447	16,0288141	13,9626	56
57	43,2871	,4143866	18,7605188	16,0649190	13,9837	57
58	43,8486	,4922360	18,8195417	16,0989802	14,0035	58
59	44,4045	,5667330	18,8757540	16,1311134	14,0219	59
60	44,9550	,6380220	18,9292895	16,1614277	14,0392	60
61	45,5000	,7062412	18,9802757	16,1900261	14,0553	61
62	46,0396	,7715227	19,0288340	16,2170058	14,0704	62
63	46,5739	,8339930	19,0750800	16,2424583	14,0845	63
64	47,1028	,8937732	19,1191238	16,2664701	14,0976	64
65	47,6266	,9509791	19,1610703	16,2891227	14,1099	65
66	48,1451	,0057217	19,2010194	16,3104931	14,1214	66
67	48,6585	,0581068	19,2390661	16,3306539	14,1322	67
68	49,1669	,1082362	19,2753010	16,3496735	14,1422	68
69	49,6701	,1562069	19,3098105	16,3676165	14,1516	69
70	50,1685	,2021119	19,3426766	16,3845439	14,1604	70
71	50,6618	,2460401	19,3739778	16,4005131	14,1686	71
72	51,1503	,2880766	19,4037883	16,4155784	14,1763	72
73	51,6340	,3283030	19,4321794	16,4297909	14,1834	73
74	52,1129	,3667971	19,4592185	16,4431990	14,1901	74
75	52,5870	,4036336	19,4849700	16,4558481	14,1964	75
76	53,0564	,4388838	19,5094952	16,4677812	14,2022	76
77	53,5212	,4726161	19,5328526	16,4790389	14,2077	77
78	53,9814	,5048958	19,5550977	16,4896593	14,2128	78
79	54,4370	,5357854	19,5762835	16,4996786	14,2175	79
80	54,8882	,5653449	19,5964605	16,5091308	14,2220	80
81	55,3348	,5936315	19,6156767	16,5180479	14,2262	81
82	55,7770	,6207000	19,6339778	16,5264603	14,2301	82
83	56,2149	,6466029	19,6514074	16,5343965	14,2337	83
84	56,6484	,6713903	19,6680070	16,5418835	14,2371	84
85	57,0776	,6951103	19,6838162	16,5489467	14,2403	85
86	57,5026	,7178089	19,6988726	16,5556101	14,2433	86
87	57,9234	,7395301	19,7132120	16,5618963	14,2460	87
88	58,3400	,7603159	19,7268686	16,5678267	14,2486	88
89	58,7524	,7802066	19,7398748	16,5734214	14,2511	89
90	59,1608	,7992407	19,7522617	16,5786994	14,2533	90
91	59,5652	,8174553	19,7640588	16,5836787	14,2554	91
92	59,9655	,8348854	19,7752941	16,5883762	14,2574	92
93	60,3619	,8515650	19,7859944	16,5928077	14,2593	93
94	60,7544	,8675263	19,7961851	16,5969884	14,2610	94
95	61,1429	,8828003	19,8058906	16,6009324	14,2626	95
96	61,5277	,8974166	19,8151339	16,6046532	14,2641	96
97	61,9086	,9114034	19,8239370	16,6081634	14,2655	97
98	62,2857	,9247879	19,8323210	16,6114749	14,2669	98
99	62,6591	,9375961	19,8403057	16,6145990	14,2681	99
100	63,0288	,9498527	19,8479102	16,6175462	14,2693	100

Jahre.	1 %	2 %	2½ %	2¾ %	3 %
51	39,7081362	31,7679459	24,6401377	21,2476340	25 09122
52	40,3041042	32,1440109	25,0230507	21,4815497	26,1082
53	40,9043507	32,4830189	25,4030165	21,7205787	26,1743
54	41,5086011	32,8852533	25,7900837	21,9647009	26,2410
55	42,1171075	33,1747575	26,1842059	22,2140184	26,3084
56	42,7298923	33,5016945	26,5854379	22,4685346	26,3764
57	43,3471210	33,8660174	26,9938363	22,7283539	26,4451
58	43,9688319	34,1677459	27,4094644	22,9934818	26,5145
59	44,5950603	34,4301041	27,8323870	23,2639260	26,5846
60	45,2259409	34,7009587	28,2626727	23,5397953	26,6553
61	45,8615150	35,0596032	28,7003928	23,8211012	26,7268
62	46,5018202	35,4102400	29,1456247	24,1079577	26,7990
63	47,1469984	35,7528432	29,5984491	24,4004790	26,8719
64	47,7970934	36,0873919	30,0589509	24,6987808	26,9456
65	48,4521509	36,4137656	30,5272199	25,0029812	27,0200
66	49,1122196	36,7319435	30,0034481	25,3131000	27,0952
67	49,7773498	37,0418945	31,4877291	25,6292590	27,1712
68	50,4475933	37,3435910	31,9801674	25,9515818	27,2480
69	51,1230033	37,6369974	32,4809707	26,2802033	27,3256
70	51,8037333	37,9221774	32,9902950	26,6152484	27,4040
71	52,4898406	38,1990961	33,5082974	26,9568434	27,4833
72	53,1813790	38,4677196	34,0351369	27,3050163	27,5634
73	53,8784028	38,7280155	34,5709750	27,6599966	27,6444
74	54,5809668	38,9798524	35,1159744	28,0219166	27,7263
75	55,2891265	39,2232004	35,6703139	28,3909107	27,8091
76	55,9029391	39,4579316	36,2341701	28,7671154	27,8928
77	56,7224625	39,6839199	36,8077236	29,1506697	27,9774
78	57,4477562	39,9010407	37,3911581	29,5417150	28,0630
79	58,1788812	40,1091719	37,9846613	29,9403954	28,1495
80	58,9159004	40,3081930	38,5884244	30,3469574	28,2370
81	59,6588789	40,4979854	39,2026424	30,7615501	28,3255
82	60,4078827	40,6784329	39,8275145	31,1843256	28,4150
83	61,1629815	40,8494220	40,4632473	31,6154391	28,5056
84	61,9242464	41,0108423	41,1100523	32,0550498	28,5972
85	62,6917516	41,1625864	41,7681431	32,5032203	28,6899
86	63,4655753	41,3045497	42,4377374	32,9601170	28,7837
87	64,2458982	41,4366305	43,1189561	33,4259104	28,8786
88	65,0328057	41,5587294	43,8120248	33,9007756	28,9747
89	65,8264878	41,6706500	44,5171753	34,3848940	29,0719
90	66,6271351	41,7723000	45,2346458	34,8784529	29,1703
91	67,4348464	41,8634900	45,9646827	35,3816464	29,2700
92	68,2498247	41,9440400	46,7074394	35,8946757	29,3709
93	69,0721830	42,0137800	47,4631782	36,4177490	29,4732
94	69,9020414	42,0725500	48,2321718	36,9510827	29,5768
95	70,7396218	42,1201000	49,0146000	37,4948999	29,6818
96	71,5850600	42,1561900	49,8107520	38,0494314	29,7882
97	72,4385906	42,1805900	50,6209271	38,6149161	29,8961
98	73,3004545	42,1930700	51,4453357	39,1915999	30,0055
99	74,1709990	42,1933000	52,2842024	39,7797379	30,1164
100	75,0504790	42,1810500	53,1378574	40,3795927	30,2289

Tafel VI.

Alter.	Süssmil Bauma									
	Lebende.									
0	1000									
1	750									
2	661									
3	618									
4	593									
5	579									
6	567									
7	556									
8	547									
9	539									
10	532									
11	527									
12	523									
13	519									
14	515									
15	511									
16	507									
17	503									
18	499									
19	495									
20	491									
21	486									
22	481									
23	476									
24	471									
25	466									
26	461									
27	456									
28	451									
29	445									
30	439									
31	433									
32	427									
33	421									
34	415									
35	409									
36	402									
37	395									
38	388									
39	381									
40	374									
41	367									
42	360									
43	353									
44	346									
45	339									
46	332									
47	324									
48	316									

	9	D. 1.
6	474	0,8
3	551	0,8
9	627	0,8
4	701	0,8
7	774	0,8
9	846	0,7
0	917	0,7
0	987	0,6
3	*055	0,7
6	122	0,7
2	189	0,6
3	254	0,7
2	319	0,6
6	382	0,6
0	445	0,6
	506	0,7
	567	0,6
	627	0,6
	686	0,6
	745	0,6
	802	0,6
	859	0,6
	915	0,6
	971	0,5
	*025	0,6
	079	0,6
	133	0,5
	186	0,5
	238	0,5
	289	0,5
	340	0,5
	390	0,5
	440	0,5
	489	0,5
	538	0,4
	586	0,4
	633	0,5
	680	0,5
	727	0,4
	773	0,4
	818	0,5
	863	0,5
	908	0,4
	952	0,4
	996	0,4

	9	D. 1.

N.	0		3	4	5	6	7	8	9	D. 1.
10	0	0(	427	435	443	451	459	466	474	0,8
11	0	4]	505	513	520	528	536	543	551	0,8
12	0	7	582	589	597	604	612	619	627	0,8
13	1	1	657	664	672	679	686	694	701	0,8
14	1	4(	731	738	745	752	760	767	774	0,8
15	1	7(	803	810	818	825	832	839	846	0,7
16	2	0	875	882	889	896	903	910	917	0,7
17	2	3(	945	952	959	966	973	980	987	0,6
18	2	5	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055	0,7
19	2	7	082	089	096	102	109	116	122	0,7
20	3	0	149	156	162	169	176	182	189	0,6
21	3	2	215	222	228	235	241	248	254	0,7
22	3	4	280	287	293	299	306	312	319	0,6
23	3	6	344	351	357	363	370	376	382	0,6
24	3	8	407	414	420	426	432	439	445	0,6
25	3	9	470	476	482	488	494	500	506	0,7
26	4	1	531	537	543	549	555	561	567	0,6
27	4	3	591	597	603	609	615	621	627	0,6
28	4	4	651	657	663	669	675	681	686	0,6
29	4	6	710	716	722	727	733	739	745	0,6
30	4	7	768	774	779	785	791	797	802	0,6
31	4	9	825	831	837	842	848	854	859	0,6
32	5	0	882	887	893	899	904	910	915	0,6
33	5	1	938	943	949	954	960	965	971	0,5
34	5	3	993	998	*004	*009	*015	*020	*025	0,6
35	5	4	047	053	058	063	069	074	079	0,6
36	5	5	101	106	112	117	122	128	133	0,5
37	5	6	154	159	165	170	175	180	186	0,5
38	5	7	206	212	217	222	227	232	238	0,5
39	5	9	258	263	269	274	279	284	289	0,5
40	6	0	309	315	320	325	330	335	340	0,5
41	6	1	360	365	370	375	380	385	390	0,5
42	6	2	410	415	420	425	430	435	440	0,5
43	6	3	460	465	469	474	479	484	489	0,5
44	6	4	509	513	518	523	528	533	538	0,4
45	6	5	557	562	566	571	576	581	586	0,4
46	6	6	605	609	614	619	624	628	633	0,5
47	6	7	652	657	661	666	671	675	680	0,5
48	6	8	699	703	708	713	717	722	727	0,4
49	6	9	745	750	754	759	763	768	773	0,4
50	6	9	791	795	800	805	809	814	818	0,5
51	7	0	836	841	845	850	854	859	863	0,5
52	7	1	881	886	890	894	899	903	908	0,4
53	7	2	926	930	934	939	943	948	952	0,4
54	7	3	969	974	978	983	987	991	996	0,4
		0	3	4	5	6	7	8	9	D. 1.

Versteigerte Log

x.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	0	000	049	094	134	170	212	253	294
11	0	414	459	502	541	569	607	645	683
12	0	702	852	901	940	980	034	4004	*039
13	1	130	173	206	240	271	303	333	367
14	1	401	432	458	493	514	544	578	610
15	1	761	790	816	847	875	903	931	959
16	2	041	065	095	122	145	173	201	227
17	2	304	330	353	380	405	430	455	480
18	2	553	577	601	625	645	672	695	715
19	2	785	810	833	856	880	900	923	949
20	3	010	032	054	075	096	115	139	160
21	3	222	243	263	284	304	324	345	365
22	3	424	444	464	483	502	522	541	560
23	3	617	636	655	674	692	711	730	747
24	3	803	820	838	856	874	892	909	927
25	3	979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099
26	4	150	166	183	200	216	232	249	265
27	4	314	330	346	362	378	393	409	425
28	4	473	487	502	518	533	548	564	579
29	4	624	639	654	669	683	698	713	728
30	4	771	786	800	814	829	843	857	871
31	4	914	928	942	955	969	983	997	*011
32	5	051	065	079	092	105	119	132	145
33	5	185	195	211	224	237	250	263	276
34	5	315	328	340	353	366	378	391	403
35	5	441	453	465	478	490	502	514	527
36	5	563	575	587	599	611	623	635	647
37	5	682	694	705	717	729	740	752	763
38	5	798	809	821	832	843	855	866	877
39	5	911	922	933	944	955	966	977	988
40	6	021	031	042	053	064	075	085	096
41	6	128	138	149	160	170	180	191	201
42	6	232	243	253	263	274	284	294	304
43	6	335	345	355	365	375	385	395	405
44	6	439	448	458	468	478	488	498	508
45	6	532	542	551	561	571	580	590	600
46	6	628	637	646	656	665	675	684	693
47	6	721	730	740	749	758	767	776	785
48	6	812	821	830	839	848	857	866	875
49	6	902	911	920	929	937	946	955	964
50	6	990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050
51	7	076	084	093	101	110	118	126	135
52	7	160	168	177	185	193	202	210	218
53	7	243	251	259	267	275	284	292	300
54	7	324	332	340	348	356	364	372	380

⊙	1	2	3	4	5	6	7	8

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wiegand, August,

Die höheren bürgerlichen Rechnungsarten

Halle 1850
Math.p. 637 hh
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083094-8